UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ESTADÍSTICA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

NOTAS DE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA

UNIDAD 6 - PARTE C - ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Responsable de cátedra: Prof. Juan Pablo Taulamet

Equipo de cátedra: ***Auxiliares:*** Ing. Ana Lisa Eusebi (JTP) - Prof. Fátima Bolatti (JTP) - Lic. Denis Lizazo Torres (Ay. 1°) ***Ayudantes:*** AIA Cristian Bottazzi - Téc. Eliana García

Carreras: Ingeniería en Recursos Hídricos - Ingeniería en Informática - Ingeniería Ambiental - Ingeniería en Agrimensura

AÑO ACADÉMICO 2025 - PRIMER CUATRIMESTRE

TIPOS DE PRUEBAS

Las pruebas de hipótesis, son una herramienta para la toma de decisiones referidas a una población a partir de una muestra. En este material se abordarán sintéticamente dos tipos de pruebas: paramétricas y no paramétricas. Las primeras se encargarán verificar afirmaciones acerca de algún parámetro de una determinada población, mientras que las segundas realizarán una afirmación referida a la bondad del ajuste de los datos con respecto a alguna distribución de probabilidades.

PRUEBAS PARAMÉTRICAS

Se trata de un tipo de prueba que propone un par de afirmaciones referidas a un parámetro, es decir al valor a alguna característica de la población, de la que proviene una muestra. De esta forma, se utilizará lo estudiado acerca de la distribución por muestreo de los estimadores para formular un par de afirmaciones denominadas hipótesis, y se intentará probar la veracidad de las mismas con un cierto nivel de significación.

LA HIPÓTESIS NULA

El primer paso para la construcción de una prueba de hipótesis paramétrica, consiste en formular un supuesto, conocido como hipótesis nula acerca de un parámetro, a modo de igualdad o desigualdad e incluyendo un valor de la variable. Si se tomara como ejemplo el parámetro μ y el valor 42, podría formularse la hipótesis que afirma que μ es igual a 42, simbólicamente:

Ejemplo 1: $H_0 : \mu = 42$

De manera similar al ejemplo anterior, podrían proponerse las siguientes hipótesis nulas, en relación al valor 4:

Ejemplo 2: $H_0 : \mu \leq 42$

Ejemplo 3: $H_0 : \mu \geq 42$

Es importante que la hipótesis nula incluya siempre la oportunidad de que la VA tome un valor en particular y ese valor puede simbolizarse como μ_0, de tal forma que en cualquiera de los casos anteriores $\mu_0 = 42$.

LA HIPÓTESIS ALTERNATIVA

Luego de formular la H_0 referida a algún parámetro, formulará una segunda hipótesis, de tal forma que se antagónica con la anterior. Se busca que las mismas se comporten como eventos mutuamente excluyentes. Esta nueva hipótesis recibe el nombre de alternativa y se denota con el símbolo H_1. A partir del ejemplo 1, planteado de H_0, se ofrecen a su vez los tres ejemplos posibles de hipótesis alternativas que se podrían proponer:

Ejemplo 4: $H_1 : \mu \neq 42$

Ejemplo 5: $H_1 : \mu < 42$

Ejemplo 6: $H_1 : \mu > 42$

Si se analizan los ejemplos 2 y 3, podrá concluirse que si se buscan alternativas que sean antagónicas, sólo podrán considerarse las vinculadas al ejemplo 6 y 5 respectivamente. En definitiva los pares de hipótesis podrían ser:

$H_0 : \mu \leq 42$

$H_1 : \mu > 42$

o bien,

$H_0 : \mu \geq 42$

$H_1 : \mu < 42$

Dependiendo de la expresión que tome la H_1, el la prueba podrá ser considerada bilateral (cuando la misma incluya el símbolo distinto) o unilateral cuando utilice los símbolos mayor o menor. De esta forma si se considera el ejemplo 4, se trata de un caso bilateral mientras que en los ejemplos 5 y 6 se trata de casos unilaterales. A su vez, los casos unilaterales recibirán una denominación dependiendo del símbolo, cuando se trate de un símbolo mayor, se denominará prueba unilateral por cola derecha y en caso contrario prueba unilateral por cola izquierda.

NIVEL DE SIGNIFICACIÓN

El nivel de significación de la prueba, será la probabilidad elegida asociada al error cometido si se rechaza H_0 cuando en realidad es cierta. Se suele utilizar valores como 1%, 5% y 10% y se denota con el símbolo α. Se recomienda retomar el significado del nivel de signifación luego de revisar los tipos de errores que se abordan más adelante.

OBJETIVO DE LA PRUEBA

Una vez establecidas las hipótesis nula y alternativa de la prueba, el objetivo será establecer cuál de las afirmaciones vinculadas con las mismas puede ser considerada cierta. Naturalmente, por tratarse de afirmaciones que representan eventos excluyentes, no podrán ser ambas ciertas a la vez. Esto es: si H_0 es cierta, H_1 no lo será y viceversa.

El procedimiento que se propone para alcanzar el objetivo es el siguiente: Se supone que la H_0 es cierta, pero se intentará encontrar evidencia para rechazarla, y dar por cierta entonces la H_1.

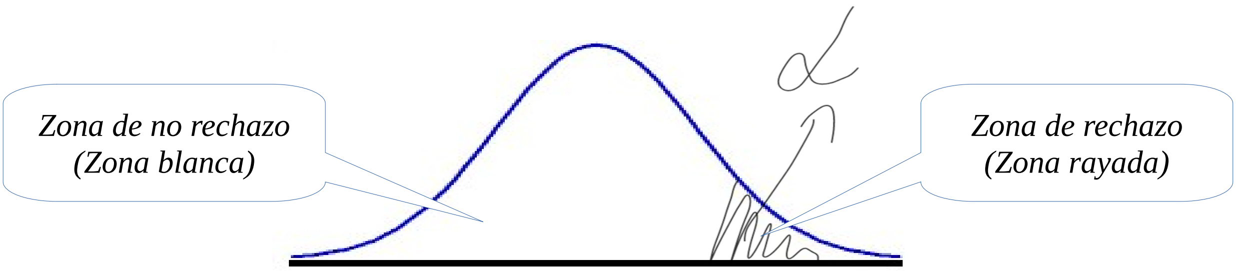
ESQUEMA: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PRUEBA

Es importante realizar una representación gráfica de la prueba esquematizando la función de densidad del estimador y rayando la probabilidad correspondiente al nivel de significación del lado correspondiente a lo que representa la H_1.

En el caso de de las pruebas bilaterales se representará la mitad de α en cada cola y en las unilaterales α estará de un solo lado. Es por ello que a menudo se utiliza el nombre de pruebas de dos colas para el caso bilateral y pruebas de una cola para los casos unilaterales.

La zona rayada que se corresponde con el nivel de significación recibe el nombre de "zona de rechazo" y la zona contraria será llamada como "zona de no rechazo". En este contexto, α representará la probabilidad de la zona de rechazo. A continuación presentamos un ejemplo de esquema:

$$H_0 : \mu = 42$$
$$H_1 : \mu > 42$$



La línea azul del gráfico anterior, representa la función de densidad de la VA estimadora y tal como hemos visto, en el caso de la $\overline{X}$, podría corresponder a la Distribución Normal o a la Distribución t de Student, dependiendo de los supuestos y el tamaño de la muestra n.

VALOR CRÍTICO

El valor que marca el inicio de cada zona de rechazo recibe el nombre de valor crítico y se encuentra asociado a un percentil de la VA estimadora. El orden de dicho percentil dependerá del nivel de significación y en el contexto del esquema anterior, que posee la zona de rechazo en la cola derecha con una probabilidad α, el orden del percentil sería su complemento $1-\alpha$. Se lo suele representar con el subíndice c o con el orden del percentil. Por ejemplo la VA estimadora es $\overline{X}$ el valor crítico puede simbolizarse como $\overline{x}_c$ o considerando el orden del percentil como $\overline{x}_{1-\alpha}$.

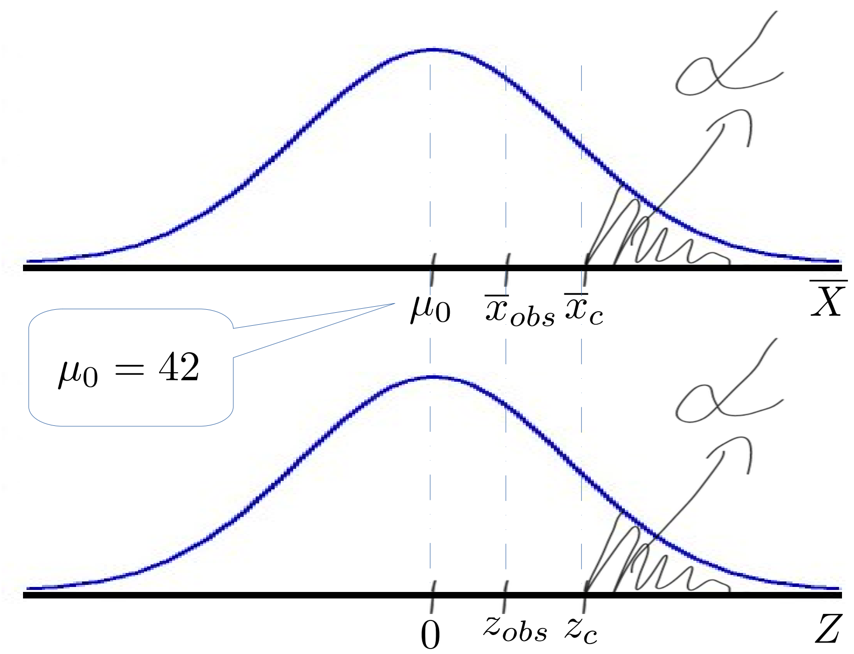
VALOR OBSERVADO

El valor observado es el valor de la estimación puntual, es decir el valor que la VA estimadora ha tomado en la muestra y suele representarse con el subíndice obs, por ejemplo para el caso de tomar a la media muestral como VA estimadora sería $\overline{x}_{obs}$.

Agregando más información al esquema: VA, valor observado y valor crítico

Es posible agregar más información sobre la VA estimadora en el esquema. Por ejemplo, si en la prueba anterior, se tiene un tamaño de muestra n mayor a 30, se supone que la media muestral sigue una distribución Normal con esperanza igual a μ_0 y desvío $s/\sqrt(n)$, y se podrían realizar dos esquemas para representar tanto la VA estimadora $\overline{X}$, como su versión estandarizada Z. En estos nuevos esquemas, incorporará en el eje de la abcisa el símbolo que representa la VA, el valor valor crítico y el valor observado.

A continuación, se presentan dos representaciones gráficas que consideran las referencias correspondientes a la VA estimadora, en dos versiones, una con la VA $\overline{X}$ y otra con la versión estandarizada Z los valores críticos y observados compatibles con una prueba que considere las hipótesis $H_0 : \mu = 42$ y $H_1 : \mu > 42$.



En los esquemas anteriores, se supone que H_0 es cierta, de tal forma que la VA $\overline{X}$ posee una esperanza μ_0 y en el esquema se observan el valor observado $\overline{x}_{obs}$ y el valor crítico $\overline{x}_c$. Por su parte, el esquema referido a la VA estandarizada Z, posee esperanza en 0, e incluye el valor estandarizado VA estimadora observado en la muestra z_{obs} y el valor crítico estandarizado z_c.

TOMA DE DECISIÓN DE LA PRUEBA

La toma de decisión de la prueba, tiene el objetivo de determinar si se ha encontrado evidencia para rechazar la H_0, que había sido supuesta como cierta. Para realizar la toma de la decisión existen varias formas posibles de comparación. Una forma sencilla puede realizarse a partir de la representación gráfica de la prueba y consiste en evaluar si el valor puntual del estimador se encuentra en la zona de rechazo. En los últimos esquemas puede observarse tanto para la VA estimadora como en su versión estandarizada, que los valores observados se encuentran en la zona de no rechazo. Por lo conclusión será que con el nivel se significación propuesto no se ha encontrado evidencia para rechazar H_0.

Otra forma de tomar la decisión consiste en calcular una probabilidad denominada P-valor y compararla con α, tal como se verá más adelante.

DETERMINACIÓN DEL VALOR CRÍTICO

Como se ha dicho, el valor crítico de una prueba se encuentra vinculado con un percentil cuyo orden depende de la cantidad de colas, de la ubicación de la zona de rechazo y del nivel de significación.

La fórmula para el cálculo del orden del percentil, será el siguiente:

Para una prueba unilateral por cola derecha: $(1-\alpha)*100$

Para una prueba unilateral por cola izquierda: $\alpha*100$

Para una prueba bilateral: $(1-\dfrac{\alpha}{2})*100$.

Por ejemplo, si se plantea un nivel de significación del 5% y una prueba por cola derecha, el valor crítico será el percentil de orden 95.

DETERMINACIÓN DEL P-VALOR

El p-valor es uno de los valores más importantes de una prueba de hipótesis, ya que sintetiza la información correspondiente la la VA estimadora, considerando la distribución de probabilidades y la hipótesis alternativa. El p-valor es una probabilidad que en el esquema se encuentra del mismo lado que el nivel de significación α y se vincula con el valor del estadístico de la prueba observado en la muestra. A modo de ejemplo, si se plantea una prueba unilateral por cola derecha, el p-valor representa la probabilidad de superar el valor de la media muestral observada en la muestra, simbólicamente $p-valor = P(\overline{X} > \overline{x}_{obs})$. De manera análoga, si se presenta una prueba por cola izquierda, tanto el valor de α como el p-valor se encuentran del lado izquierdo y la probabilidad se puede calcular haciendo $p-valor = P(\overline{X} < \overline{x}_{obs})$. Por último, si la prueba fuera bilateral, tanto α como el p-valor se encuentran repartidos en dos partes mitad en cada cola. De esta forma puede obtenerse el valor de manera similar a lo realizado para el caso de una sola cola y luego multiplicarlo por dos.

TIPOS DE ERRORES

Como se ha visto, a partir de la evidencia encontrada, se tomará la decisión de rechazar H_0 o no. A su vez, si se considera que H_0 puede ser cierta o no, se abre un escenario con cuatro combinaciones posibles, entre las cuales, existen dos tipos de errores y dos tipos de aciertos. Para pensar esta cuestión se proponen dos eventos:

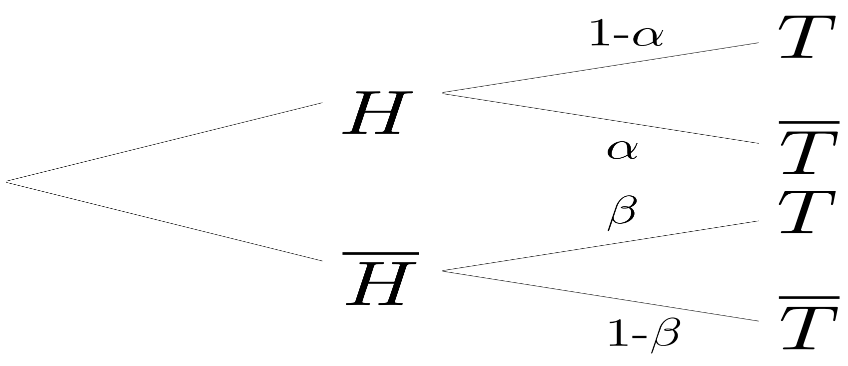
H : "H_0 es cierta"

T : "No se rechaza H_0"

Errores y Aciertos		**Supuesto**	
		H	$\overline{H}$
Decisión	T	T/H (Acierto)	$T/\overline{H}$ (Error de tipo II)
	$\overline{T}$	$\overline{T}/H$ (Error de tipo I)	$\overline{T}/\overline{H}$ (Acierto)

A partir de lo anterior se pueden definir las probabilidades de cometer errores, considerando como la probabilidad de cometer un error de tipo I y β como la probabilidad de cometer un error de tipo II. Se presenta a continuación una tabla con las probabilidades y el árbol de probabilidades correspondiente.

Probabilidades de Errores y Aciertos		**Supuesto**	
		H	$\overline{H}$
Decisión	T	$P(T/H) = 1 - \alpha$ (Acierto)	$P(T/\overline{H}) = \beta$ (Error de tipo II)
	$\overline{T}$	$P(\overline{T}/H) = \alpha$ (Error de tipo I)	$P(\overline{T}/\overline{H}) = 1 - \beta$ (Acierto)



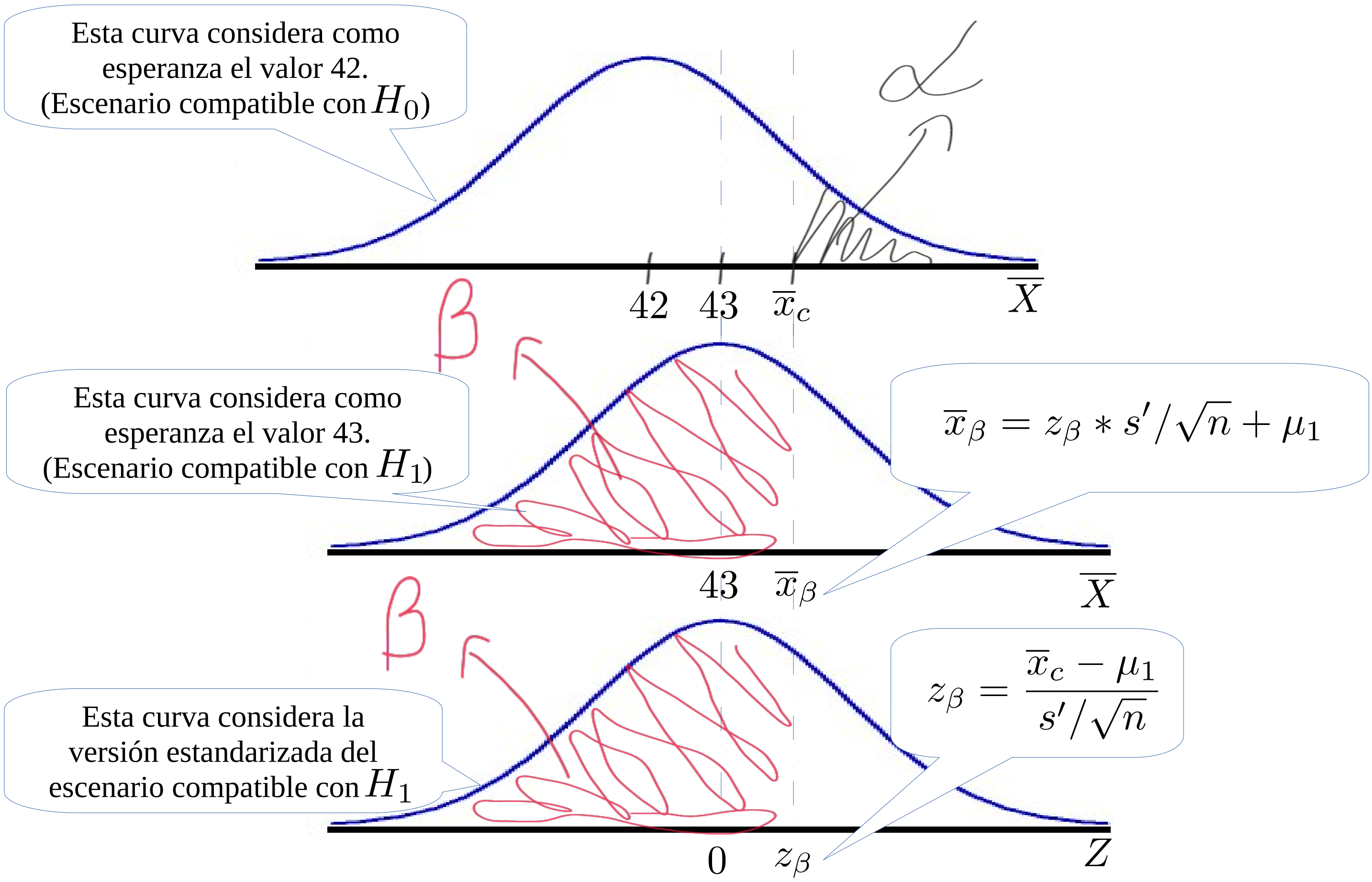
CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD β

Para obtener la probabilidad de cometer un error de tipo II, se propone partir la definición:

$$P(T/\overline{H}) = \beta$$

Como puede verse, la probabilidad de cometer este tipo de error, se trata de evaluar la probabilidad de dar por cierta H_0 cuando en realidad es cierta H_1. Para ello se realizarán dos cuestiones: en primer lugar se propondrá un valor del parámetro dentro del contexto de H_1; y en segundo lugar se obtendrá la probabilidad de no rechazar H_0 en dicho contexto. Para ello será de utilidad realizar un esquema y calcular el percentil correspondiente a la probabilidad β. De esta forma, si la prueba de hipótesis fuera sobre el parámetro μ, para el cálculo de β, se supone que μ toma un valor compatible con la H_1 y por tanto distinto de μ_0, el cual se simbolizará como μ_1.

Retomando el ejemplo anterior con $H_0 : \mu = 42$ y $H_1 : \mu > 42$, se tiene $\mu_0 = 42$ y se propone para el cálculo de beta $\mu_1 = 43$. El esquema para el cálculo de β, debe ilustrar la probabilidad de dar por cierta H_0, -es decir la probabilidad relacionada con la zona de no rechazo-, en el contexto de H_1, específicamente cuando $\mu_1 = 43$, según se presenta a continuación:



A partir del esquema anterior puede obtenerse el valor del percentil el cálculo del percentil correspondiente a β, ya sea en su versión Normal estándar:

$$z_\beta = \frac{\overline{x}_c - \mu_1}{s'/\sqrt{n}}$$

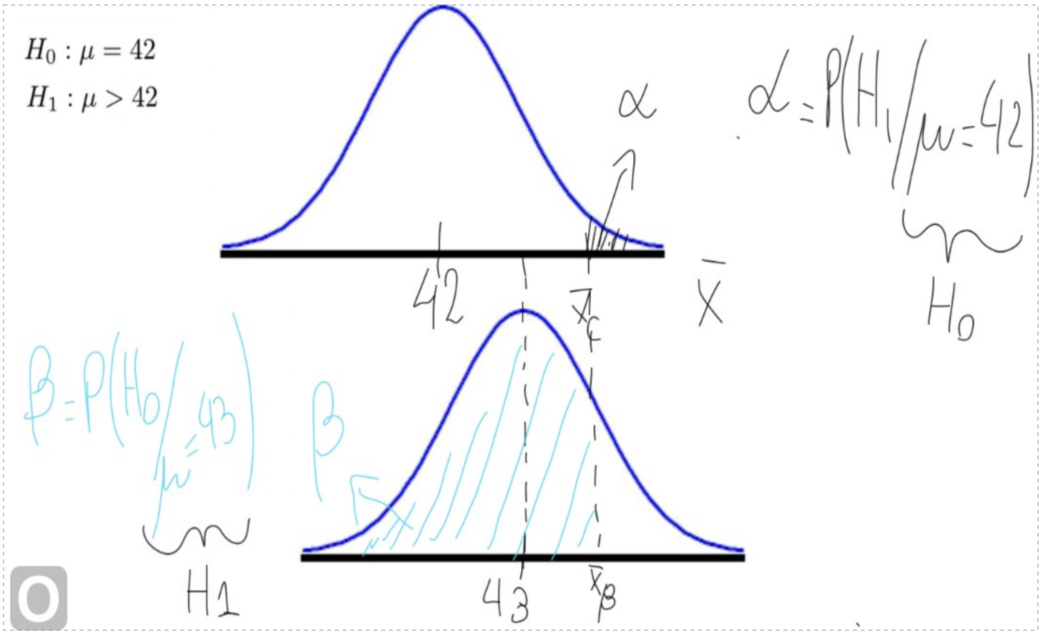
O en su versión desestandarizada:

$$\overline{x}_\beta = z_\beta * s'/\sqrt{n} + \mu_1$$

Una vez obtenido el valor del percentil, se podrá determinar el orden del mismo, es decir el valor de β, simplemente haciendo una búsqueda inversa, es decir considerando que:

$$\beta = P(Z < z_\beta) = P(\overline{X} < \overline{x}_\beta)$$

A continuación se presenta un esquema que incluye las probabilidades de cometer los errores de tipo I y II en el contexto del ejemplo anterior:



POTENCIA

La potencia de una prueba es el complemento de la probabilidad de cometer un error de tipo II β, es decir $1 - \beta$. Esta probabilidad puede ser útil para elegir entre pruebas de hipótesis que arrojen resultados contradictorios, permitiendo valorar positivamente la prueba que tiene mayor potencia.

PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

En el contexto de nuestra asignatura, una prueba no paramétrica es una prueba cuya finalidad es proponer y comprobar una hipótesis que refiere a la distribución de un conjunto de datos. Se propone para ello el estudio dos pruebas de bondad de ajuste: Chi Cuadrado y Kolmogoroff. Se recomienda estudiar ambos temas desde secciones 11.3 y 11.6 , ambas del capítulo 11 de libro Levin et al, entre las páginas 462 y 465 para el primer caso, y entre las páginas 655 y 657 para el segundo.