UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ESTADÍSTICA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

GUÍA DE PRÁCTICA

UNIDAD 3 - CARACTERÍSTICAS DE VARIABLES ALEATORIAS

Responsable de cátedra: Prof. Juan Pablo Taulamet

Equipo de cátedra: ***Auxiliares:*** Ing. Ana Lisa Eusebi (JTP) - Prof. Fátima Bolatti (JTP) - Lic. Denis Lizazo Torres (Ay. 1°) ***Ayudantes:*** AIA Cristian Bottazzi - Téc. Eliana García

Carreras: Ingeniería en Recursos Hídricos - Ingeniería en Informática - Ingeniería Ambiental - Ingeniería en Agrimensura - Ingeniería en Inteligencia Artificial

AÑO ACADÉMICO 2025 - PRIMER CUATRIMESTRE

Ejercicio 1

El porcentaje de contaminante presente en una muestra de aire es una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Se sabe que $E(X) = 3/5$, determine alguna medida que indique cómo se comporta la variable respecto al valor central.

b) Caracterizar la forma de la función dada.

Ejercicio 2

La producción de trigo en una determinada región es una variable aleatoria X (en miles de toneladas) cuya distribución está caracterizada por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{22}(x+3)(2-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El beneficio por cada mil toneladas producidas se obtiene como función de la cantidad producida resulta $B = 5000X - 1000$. ¿Cuál es el beneficio esperado?

Ejercicio 3

El tiempo requerido para transportar un cargamento por via fluvial entre dos puertos sigue una distribución de probabilidades con una media de 90 hs. y desvío de 3 hs. El capitán de un barco pretende llegar a un puerto entre 80 y 100 hs. después de haber salido del primer puerto. ¿Puede con esta información determinar la probabilidad de que realmente esto suceda?

Ejercicio 4

La variable aleatoria cantidad de días en que la precipitación alcanzó los 80 mm, durante una semana dada del mes de marzo en Santa Fe, tiene la siguiente distribución de probabilidades:

x	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.3	0.6

Determinar las principales medidas de tendencia central interpretando sus valores.

Ejercicio 5

Una empresa de transportes está analizando el número de veces que falla la máquina expendedora de boletos. Dicha variable tiene la siguiente función de probabilidad:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.1	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1

Calcular las características principales de tendencia central y variabilidad.

Ejercicio 6

La distribución de probabilidades de X: "número de errores en un canal de transmisión" se presenta en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Calcular las características fundamentales de tendencia central y variabilidad.

Ejercicio 7

Los errores en un canal de transmisión experimental se encuentran cuando un certificador controla la transmisión que detecta impulsos que faltan. El número de errores encontrados en una cadena de ocho bits es una variable aleatoria con la siguiente distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}7 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 0{,}9 & \text{si } 4 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

Calcular la esperanza y el modo del número de errores encontrados la cadena de ocho bits. ¿Qué conclusiones se pueden sacar al respecto?

Ejercicio 8

Sea X el número de veces que falla cierta máquina de control numérico: 1,2 o 3 veces en un día dado. Sea Y el número de veces que se llama al personal técnico para subsanar la falla. Su distribución de probabilidad conjunta está dada por:

f(x,y)		x = 1	x = 2	x = 3
y	1	0.05	0.05	0.10
	2	0.05	0.10	0.35
	3	0.00	0.20	0.10

a) Obtener la esperanza y la varianza de X e Y.

b) ¿Qué podría decir acerca de la dependencia de estas dos variables? Justificar.

Ejercicio 9

Se sabe que la función conjunta que describe a una variable bidimensional es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x^2 - y) & \text{para } x = 2,3 \text{ e } y = 1,2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Obtener la esperanza y la varianza de X e Y.

b) Obtener una medida de la variabilidad conjunta de X e Y . Interpretar.

c) Analizar la dependencia de X e Y.

Ejercicio 10

El nivel de agua de un tanque (en metros) es una variable aleatoria X que se describe según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Calcular las principales medidas de tendencia central y variabilidad.

b) En base al item a), ¿cómo piensa que será el coeficiente de asimetría de la variable X? Calcular y graficar la función.

Ejercicio 11

La proporción de tiempo X, que un ingeniero trabaja durante una semana de 40 hs. es una V.A. con la función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar su valor medio y varianza interpretando los resultados.

b) Si la ganancia semanal Y para este ingeniero, está dada por: $Y = 200X - 60$, determinar la ganancia semanal esperada y su varianza.

Ejercicio 12

Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda semanal es una variable aleatoria X cuya función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - 2x^2) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde X viene expresada en millones de unidades monetarias. Calcular:

a) La demanda esperada en una semana.

b) Si el costo de producir X millones de unidades viene dado por $C = 5X + 40$ unidades monetarias, ¿cuál será el costo semanal esperado?

Ejercicio 13

Sean X e Y variables aleatorias con la siguiente distribución de probabilidades conjunta:

		y		
		1	2	3
	1	0.1	0.05	0.02
x	2	0.1	0.35	0.05
	3	0.03	0.1	0.2

a) Obtener la esperanza y la varianza de X e Y.

b) ¿Qué podría decir acerca de la dependencia de estas dos variables? Justificar.

Ejercicio 14

Dos variables aleatorias X e Y tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{50}(x^2 + y^2) & \text{para } 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Obtener la esperanza y la varianza de cada una de las variables.

b) Obtener una medida de la variabilidad conjunta de X e Y. Interpretar.

c) Analizar la dependencia de X e Y.

Ejercicio 15

Una variable aleatoria posee la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-(x+y)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Obtener la esperanza y la varianza de X e Y.

b) Obtener una medida de la variabilidad conjunta de X e Y, y pensar dicho resultado en relación a la comparación entre las densidades marginales y la densidad conjunta.

Ejercicio 16

En una comunicación entre un servidor web y un cliente que necesita acceder a un sistema se estudia el tiempo de llegada de la solicitud y el tiempo transcurrido hasta el ingreso al sistema en el mecanismo de autenticación. Sean X e Y respectivamente, los períodos de tiempo que se utilizan para cada caso (en minutos) y suponiendo que la función de densidad conjunta para estas dos variables es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Calcular la covarianza y utilizarla para dar una conclusión a cerca de la dependencia lineal de las variables.

Ejercicio 17

La siguiente distribución expresa la función conjunta de la variable X (ingresos familiares mensuales en unidades de \$ 10000) y la variable Y (metros cuadrados de la vivienda familiar):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{9} & \text{si } 1 \leq x < 3; 1 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular las esperanzas marginales y $E(XY)$.

b) Calcular la $cov(X,Y)$. ¿Son X e Y son independientes? Justificar.

Ejercicio 18

Una empresa de fabricación emplea dos dispositivos de inspección X e Y para probar una fracción de su salida para propósitos del control de calidad, con $X \geq 0$:

$$E(X^2) = 5; V(X) = 4; V(X+Y) = 10; COV(X,Y) = 2$$

a) Calcular $E(X)$ y $V(Y)$.

b) Sea $Z = 5X - 3$. Calcular $E(Z)$ y $V(Z)$.

Ejercicio 19

Considerando la VA del ejercicio 10:

a) Calcular $P(0{,}06 \leq X \leq 0{,}94)$. ¿Es coherente con el teorema de Tchevycheff?

b) Calcular $P(0{,}17 \leq X \leq 0{,}83)$. ¿Es coherente con el teorema de Tchevycheff?