



2025 ~ 40° Aniversario
de la Creación del Consejo
Interuniversitario Nacional



ESTADÍSTICA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Notas de Clase - *Características de VA*

Ingenierías en: Recursos Hídricos, Informática, Ambiental,
Agrimensura e Inteligencia Artificial

Año 2025

Prof. Juan Pablo Taulamet

consultas: taulamet@unl.edu.ar

PROGRAMA ANALÍTICO

UNIDAD III : CARACTERÍSTICAS

3.1 - **Características y Momentos** de una distribución de probabilidades.

3.1.1 - Medidas de la Tendencia Central.

3.1.2 - Momentos - Medidas de Variabilidad.

3.1.3 - Medidas de Asimetría.

3.1.4 - Medidas de Kurtosis.

CARACTERÍSTICAS

“Existen una serie de números que resumen las características dominantes del comportamiento de una variable aleatoria.”

(Vanlesberg, 2021, Apuntes de Teoría)

CLASIFICACIÓN

- TENDENCIA CENTRAL
- VARIABILIDAD
- FORMA
 - ASIMETRÍA
 - CURTOSIS

Recapitulando...

DISCRETAS

$f(x)$ cuantía

Probabilidad

$$0 < f(x) < 1$$

$$F(x) \sum$$

CONTINUAS

$f(x)$ densidad

~~Probabilidad~~

$$0 < f(x)$$

$$F(x) \int$$

Recapitulando...

	UNI	BIDI
DISCRETA		
CONTINUA		

CARACTERÍSTICAS

- TENDENCIA CENTRAL
 - PROMEDIOS
 - UBICACIÓN

CARACTERÍSTICAS

- TENDENCIA CENTRAL
- PROMEDIOS
- UBICACIÓN

Promedios

- a- Esperanza matemática
- b- Media geométrica
- c- Media armónica

Medidas de ubicación

- a- Mediana
- b- Modo
- c- Cuantiles

- TENDENCIA CENTRAL
- PROMEDIOS
- ESPERANZA MATEMÁTICA

$$E(X) \begin{cases} \nearrow \text{Caso Discreto} & \sum_{\forall i} x_i \cdot f(x_i) \\ \searrow \text{Caso Continuo} & \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \end{cases}$$



Las Malvinas
son argentinas



ESTADÍSTICA

DIAPPOSITIVAS DE EJEMPLO

Unidad 3 – *Características*

Ingenierías en Recursos Hídricos / Ambiental / Agrimensura

Año 2022

Prof. Juan Pablo Taulamet

consultas: taulamet@unl.edu.ar



Para rellenar una zona baja aledaña a un río, se utilizan dos camiones: A y B. La distribución de la carga diaria (en tn) transportada por cada camión se puede adaptar a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

¿Se podrá decir cuál es el valor medio de carga de cada camión? ¿Alcanza con sólo este valor para caracterizar a las cargas?
¿Qué más se podría calcular?

Antes que nada...

¿Es una función de densidad válida?:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- ¿Definida para todo posible x ?
- ¿No negativa para todo posible x ?
- ¿Cumple la condición de cierre?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx =$$

$$\int_{-\infty}^{11} 0dx + \int_{11}^{15} \frac{x}{52} dx + \int_{15}^{\infty} 0dx =$$

$$0 + \frac{x^2}{52 * 2} \Big|_{11}^{15} dx + 0 = 1$$

Lo último que se pierde...

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx =$$

$$\int_{-\infty}^{11} x \cdot 0 dx + \int_{11}^{15} \frac{x^2}{52} dx + \int_{15}^{\infty} x \cdot 0 dx =$$

$$0 + \left. \frac{x^3}{52 * 3} \right|_{11}^{15} dx + 0 \Rightarrow E(X) \approx 13.10$$

Propiedades de la Esperanza



Destacamos las siguientes

$$E(X) \begin{cases} \text{Caso Discreto} \rightarrow \sum_{\forall i} x_i \cdot f(x_i) \\ \text{Caso Continuo} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \end{cases}$$

$$E(c) = c$$

$$E(cX) = cE(X)$$

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

Propiedades de la Esperanza



Ejercicio 2

La producción de trigo en una determinada región es una variable aleatoria X (en miles de toneladas) cuya distribución está caracterizada por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{22}(x+3)(2-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El beneficio por cada mil toneladas producidas se obtiene como función de la cantidad producida resulta $B = 5000X - 1000$. ¿Cuál es el beneficio esperado?

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

CARACTERÍSTICAS

➤ TENDENCIA CENTRAL

➤ PROMEDIOS

➤ ESPERANZA

Centro
de masa de la
distribución

➤ UBICACIÓN

➤ MEDIANA

Mitad
de la probabilidad
acumulada

➤ TENDENCIA CENTRAL

➤ PROMEDIOS

➤ UBICACIÓN

➤ MEDIANA

Mediana

Caso Discreto $\rightarrow \sum_x^{Mediana} f(x) \geq 0.5$

Caso Continuo $\rightarrow \int_{-\infty}^{Mediana} f(x)dx = 0.5$

**Suponiendo que el primer valor de X sea 1*

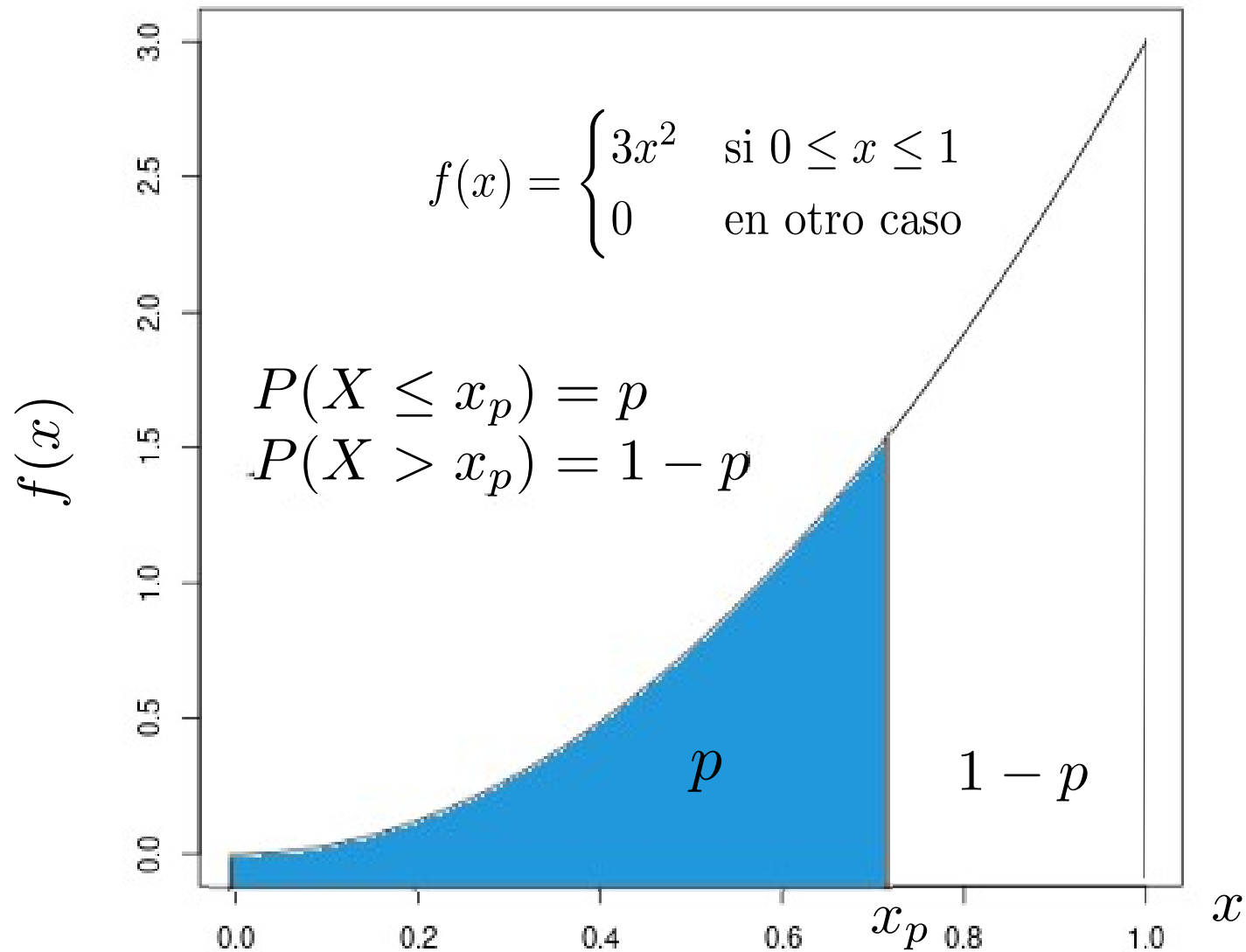
➤ MEDIDAS DE UBICACIÓN

➤ CUANTILES

Se denomina **cuantil de orden p** (siendo p un número perteneciente al intervalo $[0,1]$) al valor de la variable X_p que cumple con al menos una de las siguientes condiciones:

$$P(X \leq x_p) = p$$
$$P(X > x_p) = 1 - p$$

Ejemplo: Cuantil de orden p



➤ MEDIDAS DE UBICACIÓN

➤ CUANTILES

Dividen la distribución en partes con igual probabilidad y los veremos en cuatro grupos:*

MEDIANA

CUARTILES Q_i

DECILES D_i

PORCENTILES P_i

**Pueden existir otros, como los Terciles o los Quintiles.*

CUANTILES

Existen algunas equivalencias

$$MEDIANA = Q_2 = D_5 = P_{50}$$

$$CUARTILES \ Q_i : Q_1 = P_{25}; Q_2 = P_{50}; Q_3 = P_{75};$$

$$DECILES \ D_i : D_1 = P_{10}; D_2 = P_{20}; \dots; D_9 = P_{90};$$

$$PORCENTILES \ P_i : \text{Todos los anteriores.}$$

**Pueden existir otros, como los Quintiles.*

Mediana

Caso Discreto $\xrightarrow{\quad}$ $\sum_{i=1}^{Mediana} f(x_i) = 0.5$

Caso Continuo $\xrightarrow{\quad}$ $\int_{-\infty}^{Mediana} f(x)dx = 0.5$

Percentil P_i

Caso Discreto $\xrightarrow{\quad}$ $\sum_{j=1}^{P_i} f(x_j) = i$

Caso Continuo $\xrightarrow{\quad}$ $\int_{-\infty}^{P_i} f(x)dx = i$

*Suponiendo que el primer valor de X sea 1

➤ MEDIDAS DE UBICACIÓN

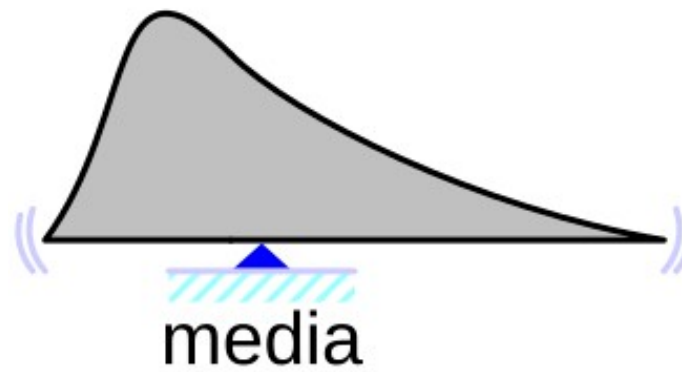
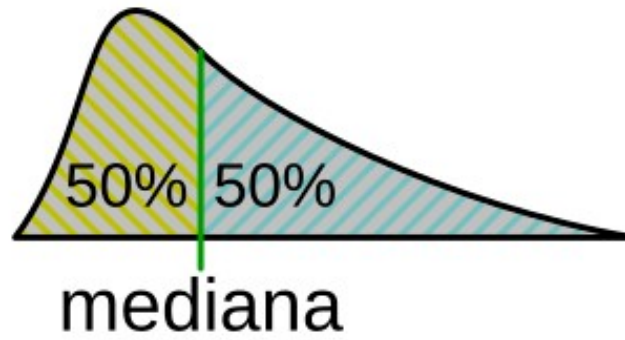
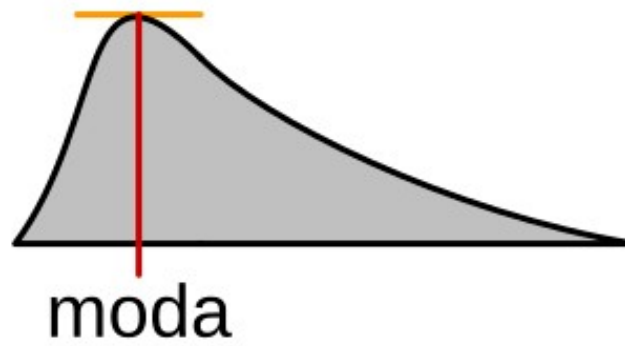
➤ MODO

El **modo o la moda** Es el valor de la variable aleatoria que se corresponde con el máximo de la función de probabilidad. En el caso discreto será el valor asociado a una mayor probabilidad de ocurrencia y en el caso continuo podrá investigarse a partir de las derivadas de la función de densidad y eventualmente observando los límites de cada tramo de la función.

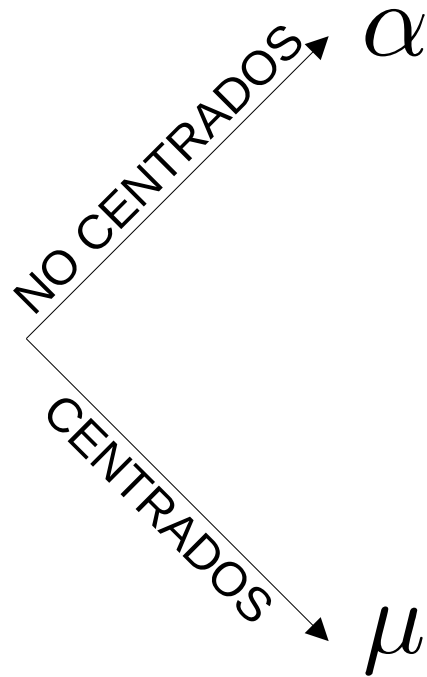
Caso Discreto
Caso Continuo

$$M_x : f(M_x) = \max_x f(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad y \quad \frac{d^2 f(x)}{dx} \leq 0$$



MOMENTOS



MOMENTOS

No Centrados o Centrados con respecto al origen

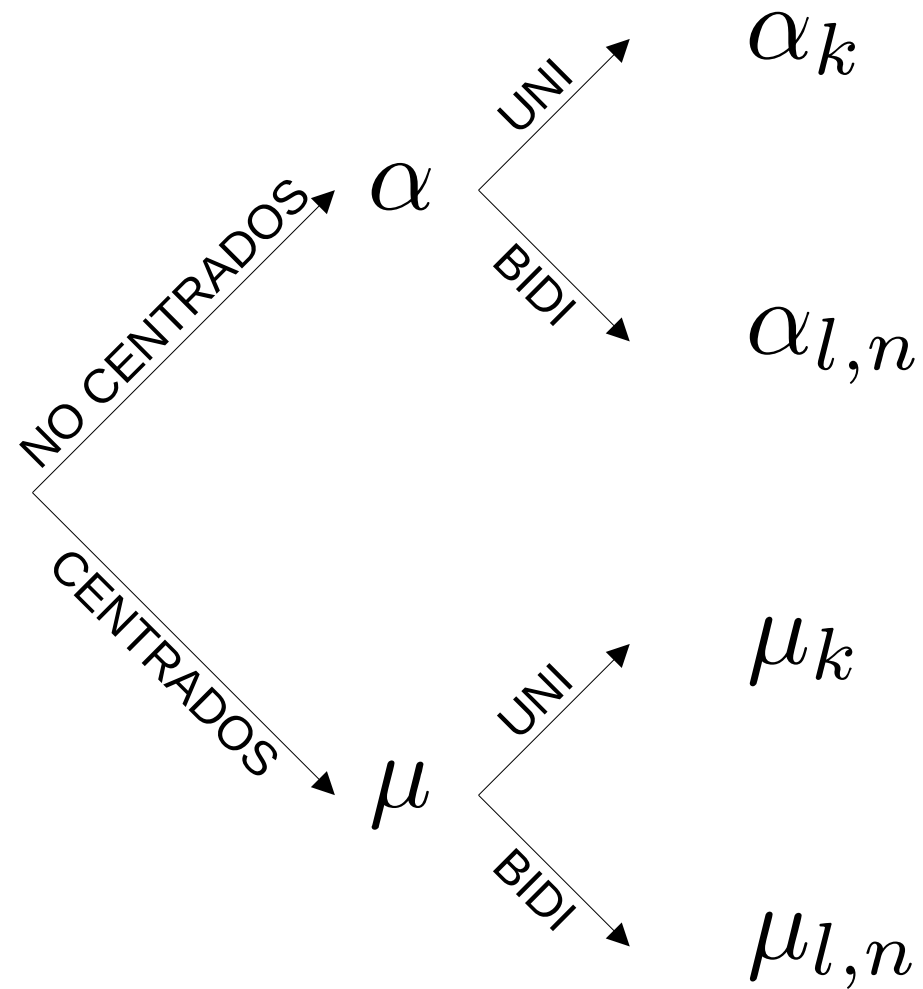
NO CENTRADOS → $\alpha_k = E[(X - 0)^k] = E(X^k)$

CENTRADOS →

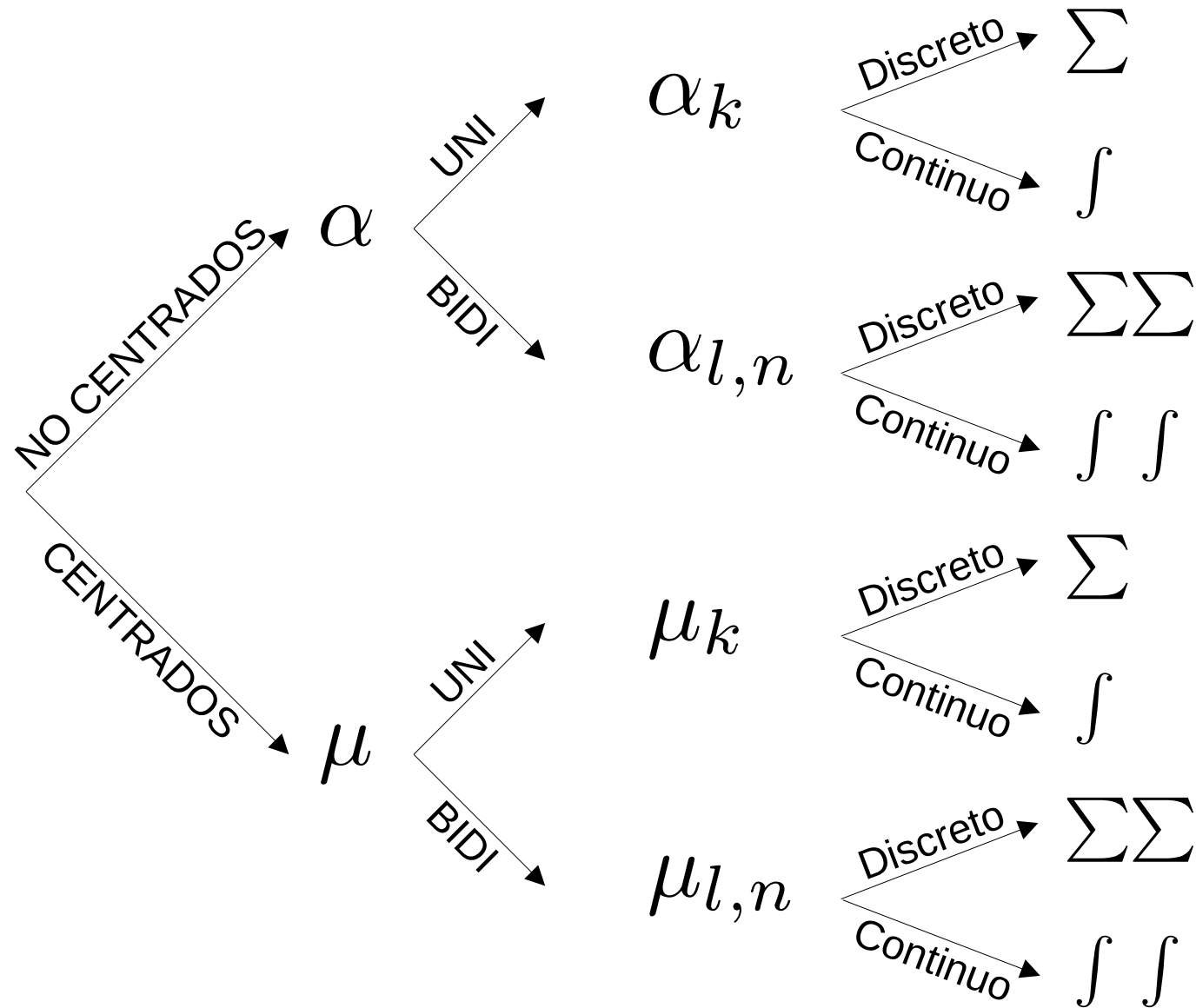
$$\mu_k = E[(X - E[X])^k]$$

Centrados (con respecto al valor medio)

MOMENTOS



MOMENTOS



MOMENTOS

No Centrados o Centrados con respecto al origen

Orden k

$$\alpha_k = E(X^k) \begin{cases} \text{Discreto} & \alpha_k = \sum_{\forall i} x_i^k \cdot f(x_i) \\ \text{Continuo} & \alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx \end{cases}$$

MOMENTOS

No Centrados o Centrados con respecto al origen

Orden 1

$$\alpha_1 = E(X^1) \begin{cases} \text{Discreto} \\ \text{Continuo} \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = \sum_{\forall i} x_i^1 \cdot f(x_i) \\ \alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 \cdot f(x) dx \end{cases}$$

MOMENTOS

No Centrados o Centrados con respecto al origen

Orden 1

$$\alpha_1 = E(X) \begin{cases} \nearrow \text{Discreto} \\ \searrow \text{Continuo} \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = \sum_{\forall i} x_i \cdot f(x_i) \\ \alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \end{cases}$$

MOMENTOS

No Centrados o Centrados con respecto al origen

Orden 2

$$\alpha_2 = E(X^2) \begin{cases} \text{Discreto} \\ \text{Continuo} \end{cases} \begin{cases} \alpha_2 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot f(x_i) \\ \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx \end{cases}$$

MOMENTOS

No Centrados o Centrados con respecto al origen

Orden 0

Condición
de cierre

$$\alpha_0 = E(X^0)$$

Discreto
↗
↘
Continuo

$$\alpha_0 = \sum_{\forall i} x_i^0 \cdot f(x_i)$$

$$\alpha_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \cdot f(x) dx$$

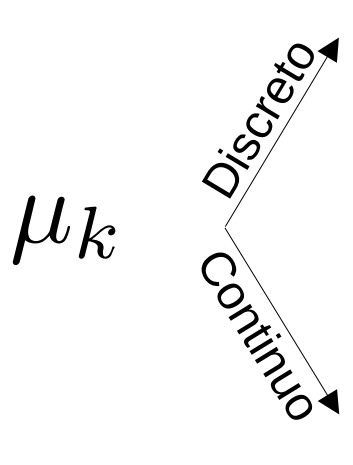
MOMENTOS

Centrados (con respecto al valor medio)

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k]$$

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

Orden k



The diagram shows the symbol μ_k on the left. To its right, a vertical double-headed arrow is labeled "Discreto" on the top half and "Continuo" on the bottom half. To the right of this arrow are two equations: the top one is for the discrete case and the bottom one is for the continuous case.

$$\mu_k = \sum_{\forall i} (x_i - \mu)^k \cdot f(x_i)$$
$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx$$

VARIABILIDAD

- RANGO (Máx - Mín)
- VARIANZA
- DESVÍO
- COEF. DE VARIABILIDAD

VARIANZA

σ^2

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X - E[X])^2]$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

Discreto

$$\text{Var}[X] = \sum_{\forall i} (x_i - E[X])^2 f(x_i)$$

Continuo

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$$

VARIANZA

σ^2

Forma resumida

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{E}[(X - \mu)^2] \\ &= \text{E}[(X^2 - 2X\mu + \mu^2)] \\ &= \text{E}[X^2] - 2\mu \text{E}[X] + \mu^2 \\ &= \text{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \text{E}[X^2] - \mu^2 \\ &= \text{E}[X^2] - \text{E}^2[X]\end{aligned}$$



Para rellenar una zona baja aledaña a un río, se utilizan dos camiones: A y B. La distribución de la carga diaria (en tn) transportada por cada camión se puede adaptar a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

¿Se podrá decir cuál es el valor medio de carga de cada camión? **¿Alcanza con sólo este valor para caracterizar a las cargas?**
¿Qué más se podría calcular?

¿Variabilidad?

$$D(X) = \sqrt{V(X)}; V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{11}^{15} x^2 \cdot \frac{x}{52} dx = \int_{11}^{15} \frac{x^3}{52} dx =$$

$$\frac{x^4}{52 * 4} \Big|_{11}^{15} dx = 173) \Rightarrow V(X) = 173 - 13 \cdot 10^2 =$$

$$V(X) \approx 1.39 \Rightarrow D(X) \approx 1.18$$

CARACTERÍSTICAS Y MOMENTOS

$$E(X) = \mu = \alpha_1$$

$$V(X) = \sigma^2 = \mu_2$$

$$V(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_0 = E(1) = 1$$

$$\mu_0 = E(1) = 1$$

$$\mu_1 = E(x - \mu) = 0$$

Propiedades de la Varianza

σ^2

$$\text{Var}(C) = 0$$

$$E[C - E(C)]^2 = E[C - C]^2 = E(0) = 0$$

Propiedades de la Varianza

σ^2

$$\text{Var}(CX) = C^2 \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} E[CX - E(CX)]^2 &= E[CX - CE(X)]^2 = \\ &= E\{ [C.(X - E(X))]^2 \} = E\{ C^2 . [X - E(X)]^2 \} = \\ &= C^2 E[X - E(X)]^2 = C^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

Propiedades de la Varianza

σ^2

$$\begin{array}{l} \nearrow \text{Discreto} \\ \searrow \text{Continuo} \end{array} \quad \text{Var}[X] = \sum_{\forall i} (x_i - E[X])^2 f(x_i)$$
$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$$

$$\text{Var}(C) = 0$$

$$\text{Var}(CX) = C^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(a + bX) = \text{Var}(a) + \text{Var}(bx) = 0 + b^2 \text{Var}(X)$$

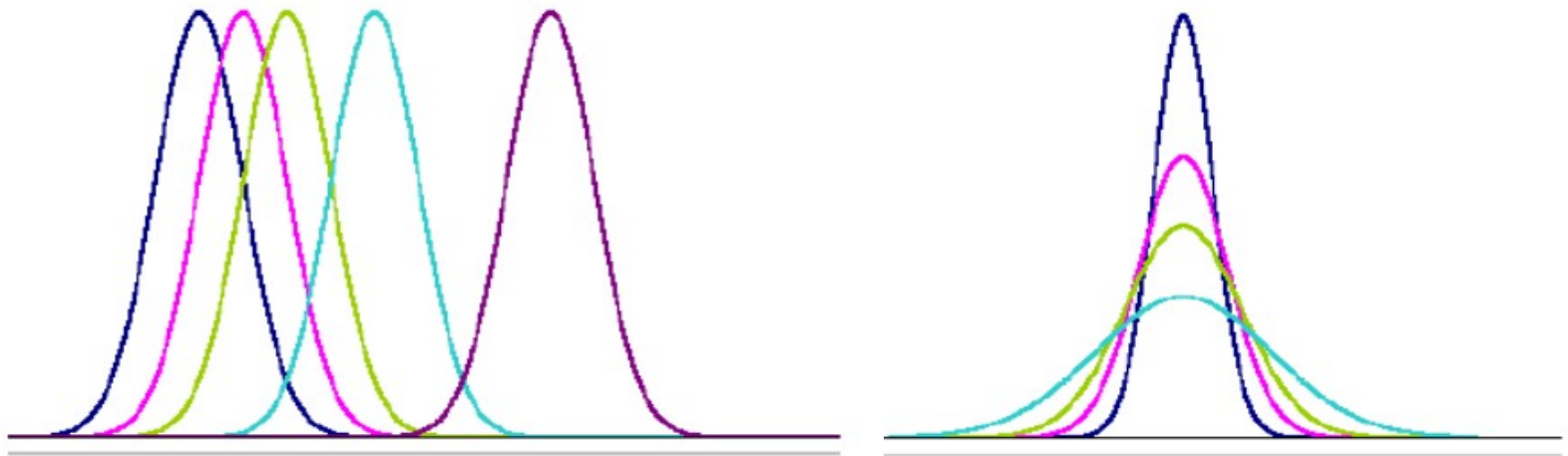
DESVÍO ESTÁNDAR y CV

$$\sigma_x = +\sqrt{\text{Var}(X)}$$

$$\sigma_x = +\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}$$

$$C_v = \frac{\sigma(\lambda)}{E(\lambda)} = \frac{\sigma}{\mu}$$

VARIACIONES DE $E(X)$ Y $V(X)$



Ejercicio 3

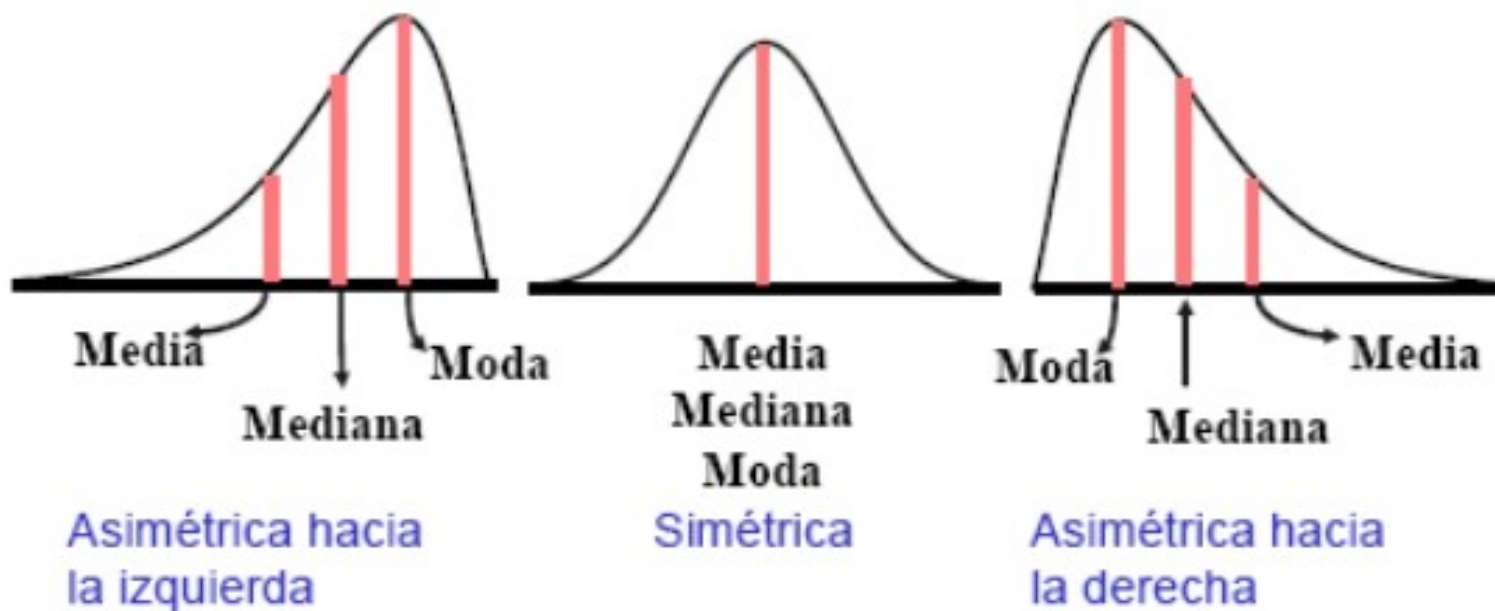
El tiempo requerido para transportar un cargamento por vía fluvial entre dos puertos sigue una distribución de probabilidades con una media de 90 hs. y desvío de 3 hs. El capitán de un barco pretende llegar a un puerto entre 80 y 100 hs. después de haber salido del primer puerto. ¿Puede con esta información determinar la probabilidad de que realmente esto suceda?

TEOREMA DE TCHEVYCHEFF

$$P(|X - \mu| \geq h \sigma) \leq \frac{1}{h^2}$$

$$P(|X - \mu| < h \sigma) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

ASIMETRÍA



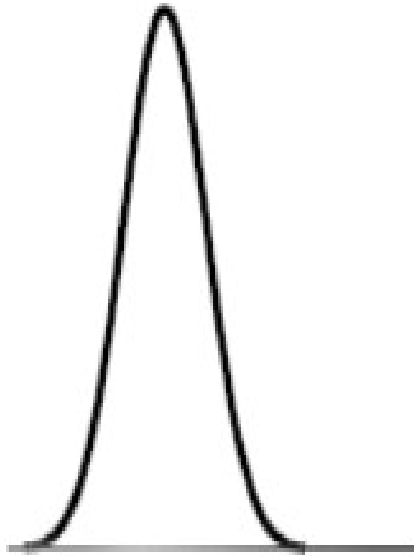
ASIMETRÍA

$$As = \frac{E(X) - \text{Modo}}{\sigma(X)}$$

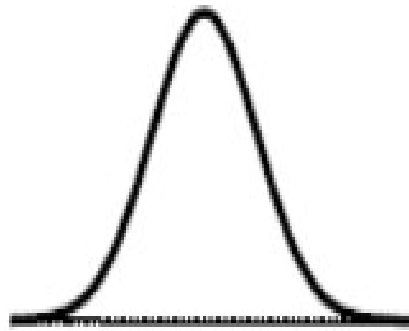
$$As = \frac{3 [E(X) - \text{Mediana}]}{\sigma(X)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3}{(\alpha_2 - \alpha_1^2)^{3/2}}$$

CURTOSIS



Leptocúrtica



Mesocúrtica



Platicúrtica

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$$

$$\gamma_2 - 3$$

CARACTERÍSTICAS DE V.A. DISTRIBUIDAS CONJUNTAMENTE

- MOMENTOS BIDIMENSIONALES
- MARGINALES
- DEPENDENCIA
- $X + Y$
- $X - Y$

MOMENTOS BIDIMENSIONALES

No Centrados o Centrados con respecto al origen

$$\alpha_{l,n} = E(X^l, Y^n)$$

$$\alpha_{l,n} \begin{cases} \nearrow \text{Discreto} \\ \searrow \text{Continuo} \end{cases} \begin{aligned} & \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} x_i^l \cdot y_j^n \cdot f(x_i, y_j) \\ & \alpha_{l,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^l \cdot y^n \cdot f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Orden l, n

ESPERANZAS MARGINALES

Calculadas a partir de momentos no centrados

$$E(X) = \alpha_{1,0}$$

$$\alpha_{1,0} \begin{cases} \text{Discreto} \nearrow \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} x_i^1 \cdot y_j^0 \cdot f(x_i, y_j) \\ \text{Continuo} \searrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 \cdot y^0 \cdot f(x, y) dy dx \end{cases}$$

ESPERANZAS MARGINALES

Calculadas a partir de momentos no centrados

$$E(Y) = \alpha_{0,1}$$

$$\alpha_{0,1} \begin{cases} \text{Discreto} \nearrow \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} x_i^0 \cdot y_j^1 \cdot f(x_i, y_j) \\ \text{Continuo} \searrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \cdot y^1 \cdot f(x, y) dx dy \end{cases}$$

MOMENTOS BIDIMENSIONALES

Centrados con respecto los valores medios

$$\mu_{l,n} = E[X - E(X)]^l \cdot E[Y - E(Y)]^n$$

$$\mu_{l,n} = E[X - \mu_X]^l \cdot E[Y - \mu_Y]^n$$

Discreto ↗

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall j} (x_i - \mu_X)^l \cdot (y_j - \mu_Y)^n \cdot f(x_i, y_j)$$

↘ Continuo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^l \cdot (y - \mu_Y)^n \cdot f(x, y) dx dy$$

Orden l, n

VARIANZAS MARGINALES

$$V(X) = \sigma_X^2 = \mu_{2,0} = \alpha_{2,0} - \alpha_{1,0}^2$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \mu_{0,2} = \alpha_{0,2} - \alpha_{0,1}^2$$

COVARIANZA

$$COV(X, Y) = \mu_{1,1} = E[X - \mu_X] \cdot E[Y - \mu_Y]$$

$$COV(X, Y) = \mu_{1,1} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1}$$

INDEPENDENCIA

X, Y Indep

$$E(X, Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

INDEPENDENCIA

$$\begin{aligned} & \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} [x_i - E(X)] \cdot [y_j - E(Y)] \cdot f(x) \cdot f(y) = \\ & = \sum_{\forall x_i} [x_i - E(X)] \cdot f(x_i) \sum_{\forall y_j} [y_j - E(Y)] \cdot f(y_j) = \\ & = E[x_i - E(X)] \cdot E[y_j - E(Y)] = \mu_{1,0} \cdot \mu_{0,1} \end{aligned}$$

$$COV(X, Y) = \mu_{1,1} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1}$$

$$COV(X, Y) = \mu_{1,1} = \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1}$$

$$COV(X, Y) = 0$$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

$$\rho_{x,y} = \frac{COV_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\mu_{1,1}}{\sqrt{\mu_{2,0} \cdot \mu_{0,2}}}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

SUMA DE VARIABLES

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2.COV(X, Y)$$



Si se supone que las cargas transportadas por los dos camiones son independientes; **¿Se podría decir cuál es el valor medio de carga total transportada por los camiones?** ¿Alcanza con sólo este valor para caracterizar a la carga total? ¿Qué más se podría calcular?

Pensando en 2 camiones

Suponiendo que X mide la carga del camión A e Y la carga del camión B, pasamos en limpio las funciones de densidad de cada variable:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{52} & \text{si } 11 < y < 15 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Carga Total Media

Luego si definimos la carga total T como la suma de las cargas de los camiones y aplicamos la propiedad de la esperanza de una suma:

$$T = X + Y$$

$$E(T) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\Rightarrow E(T) = 13.10 + 13.10 = 26.20$$

Desvío Total Medio

Análogamente, por la propiedad de la varianza de una suma, necesitaremos ***calcular la covarianza:***

$$V(T) = V(X + Y) =$$

$$V(X) + V(Y) + 2COV(X, Y)$$

$$COV(X, Y) = E(X, Y) - E(X) * E(Y)$$

Covarianza

$$COV(X, Y) = E(X, Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$E(X, Y) = \int_{11}^{15} \int_{11}^{15} xy f(x, y) \cdot dx \cdot dy =$$

$$\int_{11}^{15} \int_{11}^{15} xy \frac{x}{52} \frac{y}{52} \cdot dx \cdot dy =$$

$$\int_{11}^{15} \int_{11}^{15} \frac{x^2 y^2}{2704} \cdot dx \cdot dy \approx 171.68$$

Covarianza: Interpretación

$$COV(X, Y) = E(X, Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$\Rightarrow 171.68 - (13 \cdot 10^2) \approx 0$$

$$\Rightarrow COV(X, Y) = 0$$

Recordemos que si la covarianza es cero, podemos interpretar que no existe relación lineal entre las dos variables, lo cual es coherente con lo supuesto en el enunciado del problema.

Desvío Total Medio

$$V(T) = V(X + Y) =$$

$$V(X) + V(Y) + 2COV(X, Y)$$

$$\Rightarrow V(T) = 1.3 + 1.3 = 2.6$$

$$\Rightarrow D(T) \approx 1.61$$