UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ESTADÍSTICA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

NOTAS DE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA

UNIDAD 2 - VARIABLES ALEATORIAS

Responsable de cátedra: Prof. Juan Pablo Taulamet

Equipo de cátedra: ***Auxiliares:*** Ing. Ana Lisa Eusebi (JTP) - Prof. Fátima Bolatti (JTP) - Lic. Denis Lizazo Torres (Ay. 1°) ***Ayudantes:*** AIA Cristian Bottazzi - Téc. Eliana García

Carreras: Ingeniería en Recursos Hídricos - Ingeniería en Informática - Ingeniería Ambiental - Ingeniería en Agrimensura - Ingeniería en Inteligencia Artificial

AÑO ACADÉMICO 2025 - PRIMER CUATRIMESTRE

SOBRE ESTE DOCUMENTO

Las presentes notas de introducción, se encuentran destinadas a brindar una orientación para el estudio, durante el cursado de las asignaturas Estadística y Probabilidad y Estadística correspondientes a las siguientes carreras: Ingeniería en Recursos Hídricos, Ingeniería en Informática, Ingeniería en Agrimensura, Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Inteligencia Artificial.

Este documento fue actualizado por última vez el día 09/04/25 a las 13:17:17 hs.

DEFINICIÓN

Una variable aleatoria es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral. (WALPOLE et al, 2012, p. 81)

CLASIFICACIÓN

Las variables aleatorias (VA) que estudiaremos durante el presente curso, pueden clasificarse considerando la cantidad de dimensiones y la naturaleza de la variable. Para el uso de las VA en el contexto de un problema, se suelen realizar definiciones utilizando letras como la X y se agrega un detalle que refiere el sentido de los que representa dicha variable en el contexto de un experimento aleatorio (EA).

Variables Aleatorias Discretas (VAD)

Se trata de aquellas vinculadas a los conteos de frecuencias absolutas, de tal forma que pueden tomar valores relacionados con los números enteros o naturales. A continuación se comparte un ejemplo de la definición de una VAD.

Ejemplo de variable aleatoria discreta unidimensional

Si se considera el experimento de arrojar diez veces un dado de seis caras, podría definirse la siguiente VAD:

X : *“cantidad de veces que se obtiene un número par”*

A partir de la definición de la variable X, se considera que los valores posibles que puede tomar son los siguientes:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

A partir de lo anterior, la variable aleatoria X, puede clasificarse como discreta y unidimensional.

Ejemplo de variable aleatoria discreta bidimensional

De manera similar al ejemplo anterior si se considera el experimento aleatorio de arrojar dos dados diez veces e interesa estudiar dos magnitudes diferentes, vinculadas a la cantidad de veces que sale un número par en cada dado, puede definirse las siguiente variable aleatoria discreta bidimensional:

X : *"cantidad de veces que se obtiene un número par en el dado 1"*

Y : *"cantidad de veces que se obtiene un número par en el dado 2"*

De esta forma se puede establecer que la VA *X,Y* posee dos dimensiones y por lo tanto se puede clasificar como bidimensional discreta.

Variables Aleatorias Continuas (VAC)

Las variables aleatorias continuas, se diferencian de las discretas en que representan mediciones de magnitudes que pueden tomar dentro del conjunto de los números reales.

Ejemplo de variable aleatoria continua unidimensional

A continuación se presenta la definición de una VA vinculada a la temperatura de un CPU.

X : *"Temperatura de un CPU en ºC"*

Naturalmente la temperatura en grados celsius podrá tomar valores dentro del universo de los números reales.

Ejemplo de variable aleatoria continua bidimensional

Si para el contexto del análisis de un servidor que posee dos CPUs es de interés medir ambas temperaturas, se propone la siguiente VA Bidimensional y Continua.

X : *"Temperatura del CPU Nº1 en ºC"*

Y : *"Temperatura del CPU Nº2 en ºC"*

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

La forma en que se distribuyen las probabildades de que las variables aleatorias tomen sus diferentes valores posibles, puede estudiarse a partir de las funciones f(X) Y F(X) a continuación.

FUNCIÓN DE CUANTÍA $f(x)$

La función de cuantía de probabilidad, es una función que establece la relación existente entre los diferentes valores que puede tomar una variable aleatoria discreta y la probabilidad de ocurrencia de los mismos. En general puede ser expresada en una tabla, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 2

La distribución de probabilidades de X: "número de errores en un canal de transmisión" se presenta en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Obteniendo probabilidades con $f(x)$

A partir de la función de cuantía anterior, se conoce la probabilidad de que la VA tome cada valor posible, por ejemplo, existe un 37% de probabilidad de que tome el valor 1.

Simbólicamente

$$P(X=1) = f(1) = 37\%.$$

Validez de la función de cuantía $f(x)$

Para que una función de cuantía $f(x)$ sea válida es necesario que cumpla con dos requisitos:

1) La función debe tomar valores de probabilidad para cada uno de los valores posibles de la VA.

2) La suma de todos los valores posibles de la VA, debe sumar 1, en consonancia con lo que implica la probabilidad del Espacio Muestral. Este último punto se conoce como "condición de cierre" y será retomado con los momentos probabilísticos.

Simbólicamente

$$0 \leq f(x_i) \leq 1, \forall x_i$$

$$\sum_{\forall i} f(x_i) = 1$$

Condición de cierre

FUNCIÓN DE DENSIDAD $f(x)$

Cuando una variable aleatoria es continua, la función f(x) que permite estudiar cómo se distribuyen las probabilidades, recibe el nombre de función de densidad de probabilidad y se suele expresar en forma simbólica tal como se ilustra a continuación:

Ejercicio 7

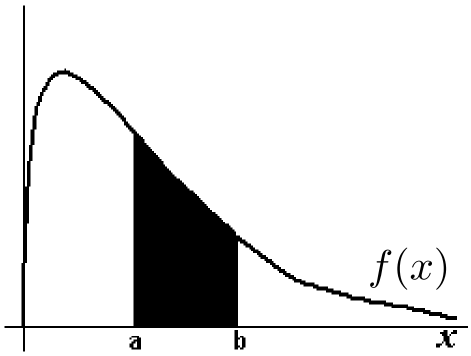
Se conoce que la variable aleatoria X definida como la duración (en días) de un disco rígido se distribuye según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & \text{si } x > 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obteniendo probabilidades entre a y b con f(x)

Debido a que la VA puede tomar infinitos valores, la probabilidad de ocurrencia de un valor en particular es nula, pero a partir de la función de densidad, puede obtenerse la probabilidad de que la VA se encuentre entre dos valores a y b, realizando una integral para calcular el área debajo de la curva:

Gráficamente



Simbólicamente

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Cuando la VA es continua, en expresiones como la precedente, se suele utilizar el símbolo menor, dado que la probabilidad de que la VA tome un valor en particular es nula, y por tanto las siguientes expresiones son equivalentes:

$$P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b)$$

Lo anterior no es cierto para una VA discreta.

Validez de la función de densidad $f(x)$

Para que una función de densidad $f(x)$ sea válida es necesario que cumpla con dos requisitos:

1) La función debe estar definida y tomar valores positivos para todos los valores posibles de X.

2) La integral desde menos infinito y hasta mas infinito debe sumar 1. Esta condición es conocida de igual forma que para el caso discreto como condición de cierre.

Simbólicamente

$$0 \leq f(x_{)}; \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Condición de cierre

FUNCIÓN ACUMULATIVA $F(x)$

La función acumulativa o función de distribución de probabilidad acumulada, es una función que representa las probabilidades de que la variable aleatoria tome valores iguales o menores a un determinado valor.

Simbólicamente

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Cabe aclarar que en la expresión anterior, la letra X mayúscula representa la variable aleatoria y la letra x minúscula el valor de la variable.

Ejemplo de función acumulativa evaluada en un valor de X

$$F(2) = P(X \leq 2)$$

Dependiendo de si la VA es clasificada como discreta o continua, la función de distribución se podrá calcular a partir de una sumatoria o una integral respectivamente.

CASO DISCRETO DE LA FUNCIÓN ACUMULATIVA $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall i / x_i \leq x} f(x_i)$$

Ejemplo de $F(x)$ para el caso discreto

Si se considera la siguiente variable:

Ejercicio 2

La distribución de probabilidades de X: "número de errores en un canal de transmisión" se presenta en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Se pueden obtener los diferentes valores de la función acumulativa para cada valor de X:

$$F(0) = 0.41$$

$$F(1) = 0.41 + 0.37 = 0.78$$

$$F(2) = 0.41 + 0.37 + 0.16 = 0.94$$

$$F(3) = 0.41 + 0.37 + 0.16 + 0.05 = 0.99$$

$$F(4) = 0.41 + 0.37 + 0.16 + 0.05 + 0.01 = 1$$

Lo anterior se puede expresar en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01
F(x)	0.41	0.78	0.94	0.99	1

La función acumulativa para el caso discreto también puede expresarse de esta forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.41 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.78 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.94 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.99 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Obteniendo probabilidades entre a *y* b *con la* $F(x)$ *de una variable discreta*

Es posible utilizar la función acumulativa para obtener la probabilidad de que X se encuentre entre dos valores:

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Ejemplo

$$P(1 < x \leq 3) = F(3) - F(1) = 0.99 - 0.78 = 0.21$$

CASO CONTINUO DE LA FUNCIÓN ACUMULATIVA $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

En la expresión anterior se utiliza un cambio de nombre de la variable X para evitar confusiones con el límite de integración superior: la letra x minúscula representa un valor particular de la VA, la letra X representa la VA y la función $f(t)$ es la función de densidad de x, expresada en función de t.

Ejemplo de F(x) para el caso continuo

Si se considera la siguiente variable:

Ejercicio 7

Se conoce que la variable aleatoria X definida como la duración (en días) de un disco rígido se distribuye según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & \text{si } x > 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de la integral de la función de densidad en cada tramo, se suele expresar la función acumulativa de una variable continua de manera simbólica:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1000}{x}, & x > 1000, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se puede utilizar la expresión de la función acumulativa evaluada en un valor de X, para obtener la probabilidad acumulada de la siguiente forma:

$$F(1500) = 1 - (1000/1500) = 1 - 0.67 = 0.33$$

De esta forma, la probabilidad de que X tome un valor igual o menor a 1500 es 33%.

Obteniendo probabilidades entre a y b con la $F(x)$ de una variable continua

Es posible utilizar la función acumulativa para obtener la probabilidad de que X se encuentre entre dos valores:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

Ejemplo

A partir del ejemplo anterior, si se desea utilizar la función acumulativa para encontrar la probabilidad de que X se encuentre entre 1500 y 2000, se lo puede hacer de la siguente forma:

$$F(1500) = 1 - (1000/1500) = 1 - 0.67 = 0.33$$

$$F(2000) = 1 - (1000/2000) = 1 - 0.50 = 0.50$$

$$P(1500 < x < 2000) = F(2000) - F(1500) = 0.50 - 0.33 = 0.17$$

FUNCIONES DE VARIABLES BIDIMENSIONALES

A continuación se realizará un abordaje vinculado con las VA que poseen dos dimensiones, para estudiar las funciones de probabilidad conjunta, las funciones marginales, las funciones acumulativas, el cálculo de probabilidades condicionales y la dependencia.

FUNCIÓN DE CUANTÍA CONJUNTA $f(x, y)$

La función de cuantía de probabilidad conjunta, es una función que establece la relación existente entre los diferentes valores que puede tomar una variable aleatoria discreta considerando sus dos dimensiones y la probabilidad de ocurrencia de los mismos. En general puede ser expresada en una tabla, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 5

Sea X el número de veces que falla cierta máquina de control numérico: 1,2 o 3 veces en un día dado. Sea Y el número de veces que se llama al personal técnico para subsanar la falla. Su distribución de probabilidad conjunta está dada por:

f(x,y)		x		
		1	2	3
	1	0.05	0.05	0.10
y	2	0.05	0.10	0.35
	3	0.00	0.20	0.10

Obteniendo probabilidades con $f(x, y)$

A partir de la función de cuantía conjunta, se conoce la probabilidad de que la VA tome cada combinación posible de los valores de la misma, por ejemplo, existe un 35% de probabilidad de que X tome el valor 3 e y tome el valor 2.

Simbólicamente

$$P(X = 3 \cap Y = 2) = f(3, 2) = 35\%.$$

Validez de la función de cuantía conjunta $f(x, y)$

Para que una función de cuantía conjunta sea válida es necesario que cumpla con dos requisitos:

1) La función debe tomar valores de probabilidad para cada uno de los valores posibles de la VA.

2) La suma de todos los valores posibles de la VA, debe sumar 1, en consonancia con lo que implica la probabilidad del Espacio Muestral. Este último punto se conoce como “condición de cierre” y será retomado con los momentos probabilísticos.

Simbólicamente

$$0 \leq f(x_i, y_j) \leq 1, \forall x_i, y_j$$

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall j} f(x_i, y_j) = 1$$

Condición de cierre

FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA $f(x, y)$

Cuando una variable aleatoria es continua, la función f(x,y) que permite estudiar cómo se distribuyen las probabilidades, recibe el nombre de función de densidad de probabilidad conjunta y se suele expresar en forma simbólica tal como se ilustra a continuación:

Ejercicio 12

En una comunicación entre un servidor web y un cliente que necesita acceder a un sistema se estudia el tiempo de llegada de la solicitud y el tiempo transcurrido hasta el ingreso al sistema en el mecanismo de autenticación. Sean X e Y respectivamente, los períodos de tiempo que se utilizan para cada caso (en minutos) y suponiendo que la función de densidad conjunta para estas dos variables es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Obteniendo probabilidades con $f(x, y)$

Debido a que la VA puede tomar infinitos valores, la probabilidad de ocurrencia de un valor en particular es nula, pero a partir de la función de densidad conjunta se pueden obtener probabilidades a partir de la doble integral.

Simbólicamente

$$P(a < x < b \cap c < y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\, dy$$

Validez de la función de densidad $f(x, y)$

Para que una función de densidad $f(x, y)$ sea válida es necesario que cumpla con dos requisitos:

1) La función debe estar definida y tomar valores positivos para todos los valores posibles de Xe Y.

2) La integral doble desde menos infinito y hasta mas infinito debe sumar 1. Esta condición es conocida de igual forma que para el caso unidimensional como condición de cierre.

Simbólicamente

$$0 \leq f(x,y); \forall x, \forall y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,dy = 1$$

Condición de cierre

FUNCIONES MARGINALES

Cuando se cuenta con una función conjunta, es decir vinculada con las dos dimensiones de una VA Bidimensional, y se desea estudiar una sola dimensión, se hace uso de las funciones marginales. Cuando se trata de VA discretas, se utilizará una sumatoria y cuando la VA sea continua una integral.

Funciones de cuantía marginales

$$f_x(x) = P(X = x) = \sum_{\forall y_i} f(x, y_i)$$

$$f_y(y) = P(Y = y) = \sum_{\forall x_i} f(x_i, y)$$

Funciones de densidad marginales

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

FUNCIONES MARGINALES ACUMULATIVAS

De manera análoga a lo referido sobre funciones acumulativas para variables unidimensionales se pueden obtener funciones acumulativas vinculadas con las funciones de cuantía y densidad marginales.

Funciones marginales acumulativas para VA Discreta

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall i / x_i \leq x} f_x(x) = \sum_{\forall i / x_i \leq x} \sum_{\forall y_j} f(x_i, y_j)$$

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{\forall i / y_i \leq y} f_y(y) = \sum_{\forall i / y_i \leq y} \sum_{\forall x_j} f(x_j, y_i)$$

Funciones marginales acumulativas para VA Continua

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y)\, dy\, dt$$

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, dx\, dt$$

Tal como se verá en el siguiente ejemplo, para el caso discreto, las funciones marginales pueden calcularse en los márgenes de la tabla y por ese motivo reciben ese nombre.

Ejemplo de funciones marginales para el caso discreto

Un teodolito se clasifica de acuerdo al número de defectos de fabricación y a la fábrica que lo produce. Sean X e Y las variables aleatorias que representan respectivamente el número de defectos por unidad, con valores posibles 0, 1, 2 y 3; y el número de fábrica con valores posibles 1 y 2. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades conjunta.

		x			
		0	1	2	3
y	1	1/8	1/16	3/16	1/8
	2	1/16	1/16	1/8	1/4

La tabla anterior puede completarse con las funciones marginales de la siguiente forma:

$f(x, y)$		x					
		0	1	2	3	$f_y(y)$	$F_y(y)$
y	1	1/8	1/16	3/16	1/8	1/2	1/2
	2	1/16	1/16	1/8	1/4	1/2	1
	$f_x(x)$	3/16	2/16	5/16	3/8	1	
	$F_x(x)$	3/16	5/16	10/16	1		

FUNCIÓN ACUMULATIVA CONJUNTA

De manera similar a las funciones acumulativas marginales, puede obtenerse una función acumulativa que considere conjuntamente ambas variables.

Función acumulativa conjunta para VA Discreta

$$F(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{\forall i / x_i \leq x} \; \sum_{\forall j / y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Función acumulativa conjunta para VA Continua

$$F(x,y) = P(X < x \cap Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,u)\, du\, dt$$

INDEPENDENCIA DE VARIABLES BIDIMENSIONALES

De manera similar a lo visto en la unidad 1, cuando dos VA son independientes, la probabilidad conjunta de que ambas tomen determinados valores o rangos de valores debe coincidir con el producto de las probabilidades marginales de dichos valores.

Caso para VA discreta

Para el caso de VA bidimensionales discretas, las dos dimensiones X e Y pueden considerarse independientes si se verifica la igualdad de la función de cuantía conjunta con el producto de las marginales para cada uno de los respectivos valores posibles.

Queda claro que si se encuentra un sólo par de valores de X e Y, en lo cuales la igualdad no se verifica, X e Y son dependientes.

Simbólicamente

$$f(x_i, y_j) = f_x(x_i) * f_y(y_j), \forall x_i, y_j \iff X, Y \textit{son independientes}$$

Caso para VA continua

Para el caso de VA bidimensionales continuas, las dos dimensiones X e Y pueden considerarse independientes si se verifica la igualdad de la función de densidad conjunta con el producto de las densidades marginales.

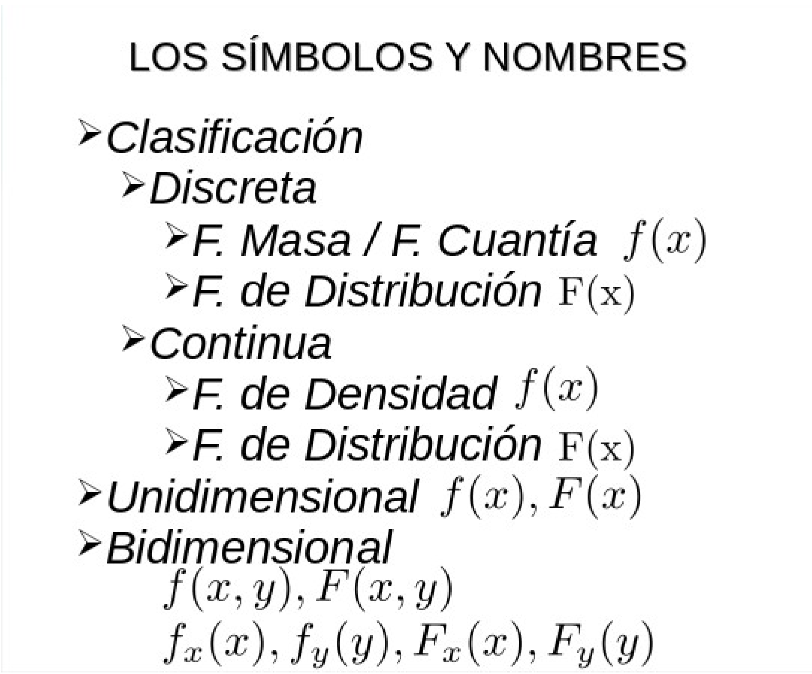
Simbólicamente

$$f(x,y) = f_x(x) * f_y(y) \iff X, Y \textit{son independientes}$$

LOS SÍMBOLOS Y SUS NOMBRES

A partir de lo visto anteriormente, se concluye que existen símbolos como $f(x)$ que pueden cambiar de nombre y sentido en diferentes contextos, dependiendo de lo que representan. En el caso de una VAD la $f(x)$ representa una función de cuantía o masa de probabilidad, que a su vez representa valores concretos de probabilidades de ocurrencia de determinados valors de la VA. En el caso continuo en cambio la $f(x)$ representa densidades de probabilidades y no toma valores de probabilidades.

De manera general, se presentan los símbolos involucrados para todas las funciones:



PROBABILIDAD CONDICIONAL

Para el cálculo de probabilidades condicionales se puede extender lo visto en la unidad 1, de tal forma que la probabilidad condicional se puede resolver con el cociente entre una probabilidad conjunta y una probabilidad vinculada al condicionante.

Ejemplo para VA discreta unidimensional

$$P(X=2/X>1)=\frac{P(X=2\cap X>1)}{P(X>1)}=\frac{P(X=2)}{P(X>1)}=\frac{f(2)}{1-F(1)}$$

Ejemplo para VA continua unidimensional

$$P(X<2000/X<1500)=\frac{P(X<2000\cap X>1500)}{P(X>1500)}=\frac{P(1500<X<2000)}{P(X>1500)}=\frac{F(2000)-F(1500)}{1-F(1500)}$$

Ejemplo para VA discreta bidimensional

$$P(X = 4/Y = 2) = \frac{P(X = 4 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{f(4,2)}{f_y(2)}$$

Ejemplo para VA continua bidimensional

$$P(X > 2/Y < 4) = \frac{P(X > 2 \cap Y < 4)}{P(Y < 4)} = \frac{\int_{-\infty}^{4} \int_{2}^{\infty} f(x,y)dx\,dy}{\int_{-\infty}^{4} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy} = \frac{\int_{-\infty}^{4} \int_{2}^{\infty} f(x,y)dx\,dy}{\int_{-\infty}^{4} f_y(y)\,dy}$$

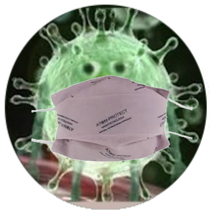
PROBABILIDAD DE UNA SUMA DE VARIABLES

Para el cálculo de probabilidades que involucren relaciones matemáticas entre las variables, se puede despejar una de las variables en función de la otra, de tal forma que permita utilizarla como límite superior o inferior, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$P(X + Y > 1) = P(X > 1 - Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{1-Y}^{\infty} f(x,y)dx\,dy$$

En el ejemplo anterior, la integral que tiene como límite inferior para la X, la expresión 1 - Y, debe realizarse en primer término y luego la segunda integral correspondiente a la Y.

2021 ~ Año de homenaje
al Premio Nobel de Medicina
Dr. César Milstein



ESTADÍSTICA
DIAPOSITIVAS DE EJEMPLO

Unidad 2 – *Variables Aleatorias*

Carreras: IRH - II - IA - IAG

Año 2021

Prof. Juan Pablo Taulamet

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Ejemplo: Función Acumulativa

Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa que administra una represa hidroeléctrica ha estimado que la demanda semanal de energía es una variable aleatoria X (expresada en millones de unidades), cuya función de probabilidad viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/3)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

¿Podemos obtener la probabilidad de que la demanda semanal sea mayor a 2? ¿Cómo?

Planteo: $F(x)$ y Prob. Contraria

Dado que la función de distribución nos brinda la posibilidad de calcular la probabilidad acumulada hasta un valor determinad y aprovechando el concepto de probabilidad contraria hacemos:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$P(X > 2) = 1 - F(2)$$

Resolviendo...

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/3)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X > 2) = 1 - F(2) =$$

$$1 - (1 - e^{-(2/3)^2}) = \frac{1}{e^{\frac{4}{9}}} = 0,6411$$

La probabilidad de que la demanda semanal sea superior a 2 es del 64%.

Segunda Parte: V.A. Bidim

Si se sabe que una nueva variable aleatoria Y también es necesaria para el estudio de manera que la función conjunta de ambas variables es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Se puede considerar que ambas variables son independientes?

Calcular $P(Y < 1/X > 2)$ e interpretar su significado.

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Independencia

¿Son X e Y Independientes?

DATOS:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/3)^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Independencia

CASO DISCRETO

¿Son X e Y Independientes?

$$\Updownarrow$$

$$f(x_i, y_j) = f_x(x_i) * f_y(y_j)$$
$$\forall x_i, y_j$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Independencia

CASO CONTINUO

¿Son X e Y Independientes?

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f_x(x) * f_y(y)$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Hallamos $f_x(x)$

$$f_x(x) = \int f(x,y) \cdot dy =$$

$$\int \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dy =$$

$$\boxed{f_x(x) = \frac{2}{9} x e^{\frac{-x^2}{9}}}$$

También puede obtenerse f(x) a partir de la derivada de F(x)

Hallamos $f_y(y)$

$$f_y(y) = \int f(x,y) \cdot dx =$$

$$\int \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dx =$$

$$\boxed{f_y(y) = \frac{e^{\frac{-y}{2}}}{2}}$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Hallamos $f_x(x) * f_y(y)$

$$f_x(x) = \frac{2}{9}xe^{\frac{-x^2}{9}}$$

$$f_y(y) = \frac{e^{\frac{-y}{2}}}{2}$$

$$f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{2}{9}xe^{\frac{-x^2}{9}} \cdot \frac{e^{\frac{-y}{2}}}{2}$$

$$\boxed{f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{1}{9}xe^{-(x/3)^2-y/2}}$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Independencia

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2}}$$

$$\boxed{f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{1}{9} x e^{-\frac{x^2}{9} - y/2}}$$

$$f(x,y) = f_x(x) * f_y(y)$$

X e Y son Independientes

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Cálculo de Probabilidad

$$P(Y < 1/X > 2) =?$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Cálculo de Probabilidad

Recordando Planteo Condicional

$$P(Y < 1 / X > 2) =$$

$$\frac{P(Y < 1 \cap X > 2)}{P(X > 2)} =$$

Cálculo de Probabilidad

$$\frac{P(Y < 1 \cap X > 2)}{P(X > 2)} =$$

$$\frac{\int_0^1 \int_2^\infty \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dx \cdot dy}{\int_0^\infty \int_2^\infty \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dx \cdot dy} =$$

$$\frac{0,25}{0,64} \approx 39\%$$