(1994–
2024)

30 años de la
Consagración Constitucional
de la Autonomía y Autarquía
Universitaria en Argentina.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
LUX INDEFICIENS · 1919

FICH

ESTADÍSTICA

Notas de Clase #2 - *Teorema de Bayes*

Ingenierías en: Recursos Hídricos, Informática, Ambiental,
Agrimensura e Inteligencia Artificial

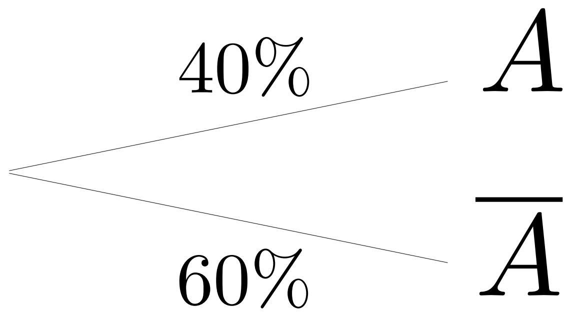
Año 2024

Prof. Juan Pablo Taulamet

consultas: taulamet@unl.edu.ar

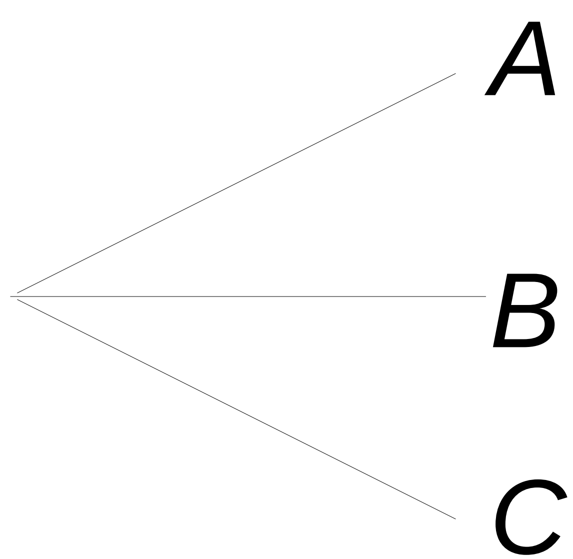
Árbol de probabilidad:

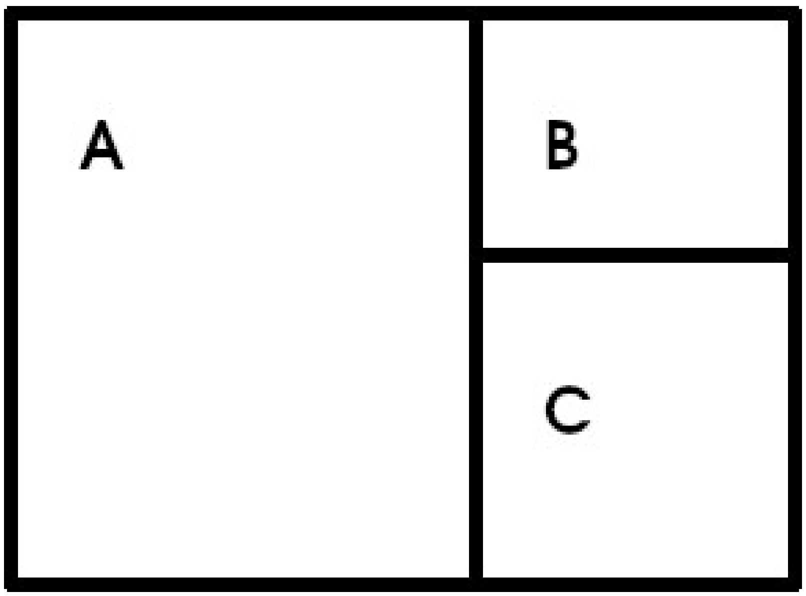
Se trata de un diagrama que permite representar el espacio muestral a partir de un conjunto de Eventos. El caso más sencillo podría ser el de dos eventos complementarios. De esta forma, si se define un evento A, que representa un conjunto de puntos en el espacio muestral, puede realizarse un diagrama de dos ramas, de tal forma que se asocie una rama a la ocurrencia del evento A y otra, a la ocurrencia del evento complementario a A. El diagrama permite incluir en la representación la probabilidad de ocurrencia de cada rama y la suma de las probabilidades de todas las ramas debe ser 1. Por ejemplo si el evento A, tiene una probabilidad de ocurrencia del 40%, la representación del EM podría realizarse mediante el siguiente diagrama de árbol de probabilidad:



Sistema Exhaustivo y Excluyente y Árbol:

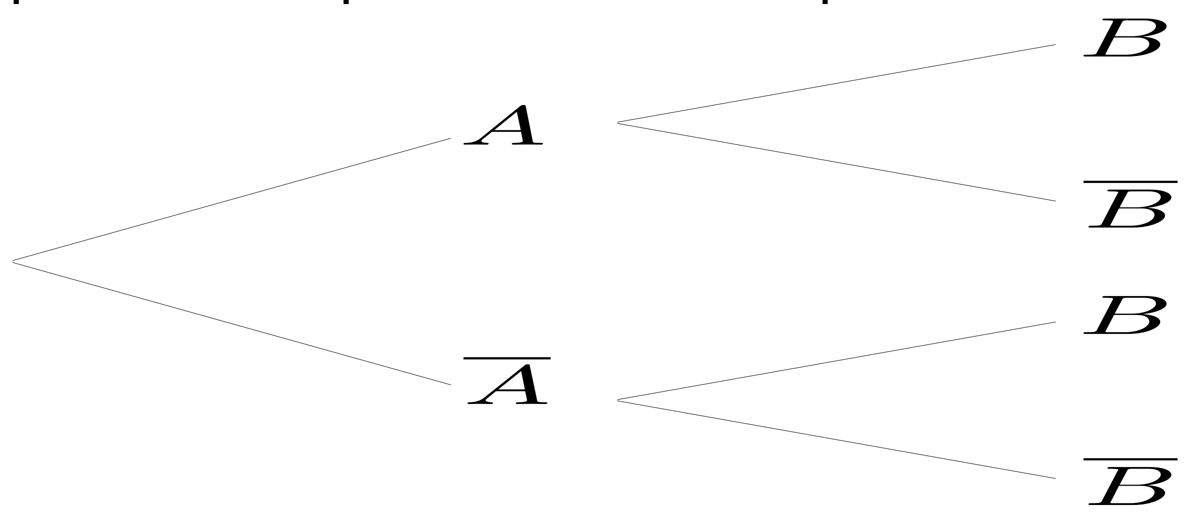
De manera similar al caso de los eventos complementarios, en el árbol de probabilidad se podrían representar cualquier conjunto de eventos que fueran excluyentes entre sí y que conformasen un sistema exhaustivo. Por ejemplo, dados 3 eventos A, B y C que conformen dicho sistema, se podrían generar los siguientes diagramas:





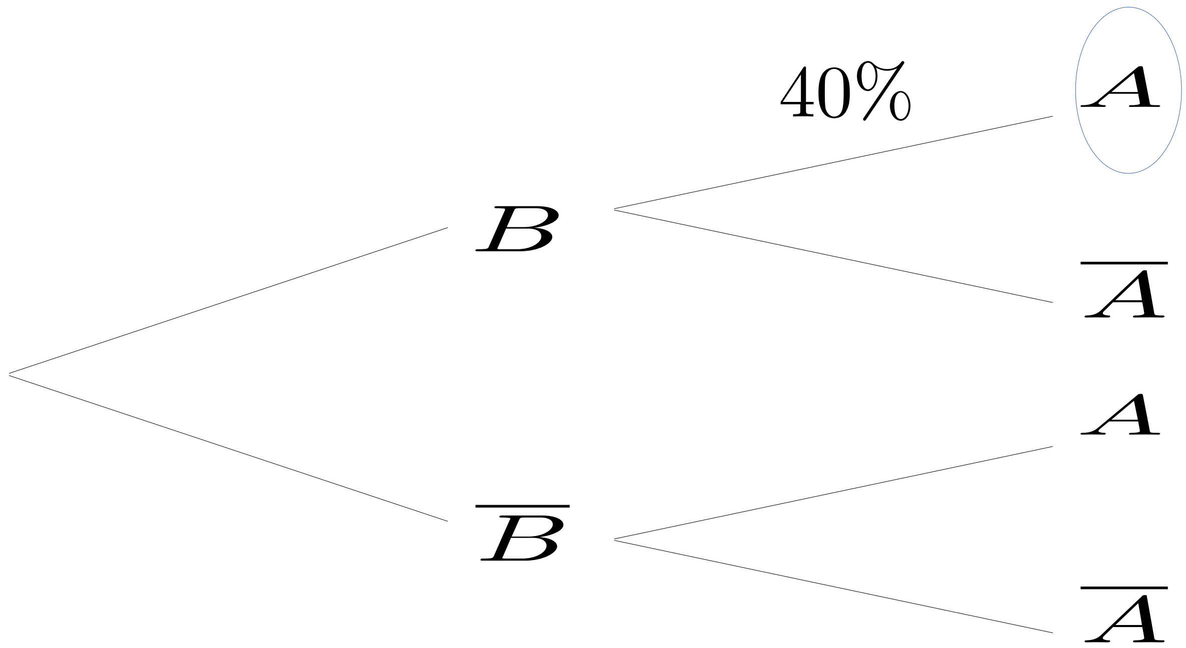
Árbol de dos niveles:

Se puede realizar un árbol que posea más de un nivel o generación de ramas, lo cual permitirá representar otro tipo de probabilidades. Por ejemplo, colocando en el primer nivel un evento A o su complementario y en un segundo nivel un evento B o su complementario. De esta forma, se pueden expresar 4 combinaciones de intersecciones. Tal como abordaremos a continuación, en el gráfico siguiente, no es lo mismo que suceda el evento B viniendo por el camino de la rama A, que viniendo por el camino complementario:



Probabilidad condicional:

Las probabilidades que se encuentran en el segundo nivel, se corresponden con probabilidades que hacen referencia determinados eventos, pero considerando el contexto de la rama del nivel precedente. Por ejemplo, el diagrama que sigue representa que la probabilidad de que suceda el evento A, en el contexto del evento B es del 40%. Esta probabilidad recibe el nombre de probabilidad condicional y se representa simbólicamente como P(A/B) = 40%.



PROBABILIDAD CONDICIONAL

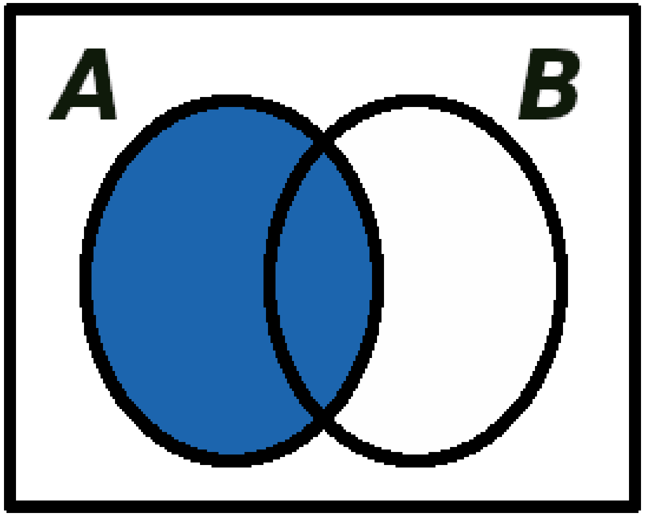
Desde el punto de vista conceptual, la probabilidad condicional de A dado B, no hace referencia a la probabilidad de que se obtenga como resultado alguno de los puntos del EM incluidos en A, sino más bien alguno de los puntos incluidos en A, dentro del universo de los puntos incluidos en el evento B. Es decir, en vez de considerar la probabilidad A en el contexto del espacio muestral, se considera la probabilidad de A en el contexto del evento B, que es un recorte del EM. Simbólicamente, la probabilidad condicional de A dado B, se define con la siguiente expresión:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

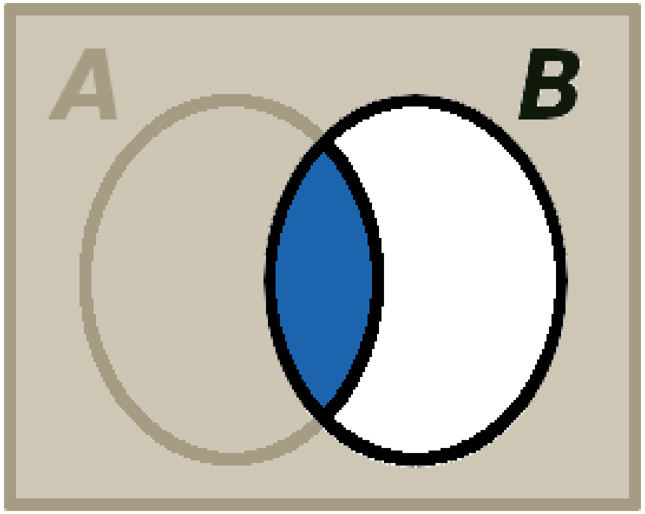
A continuación se presentan dos diagramas de Venn que señalan -en color azul-, al evento A, en dos contextos diferentes. En la imagen de la izquierda, se considera que no existe ningún condicionante, a la derecha, en el contexto del evento B, los únicos puntos de A que pueden considerarse, son aquellos que están además en incluidos en B.

Probabilidad de A en el espacio muestral.



$$P(A)$$

Probabilidad de A, en el contexto del evento B.



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

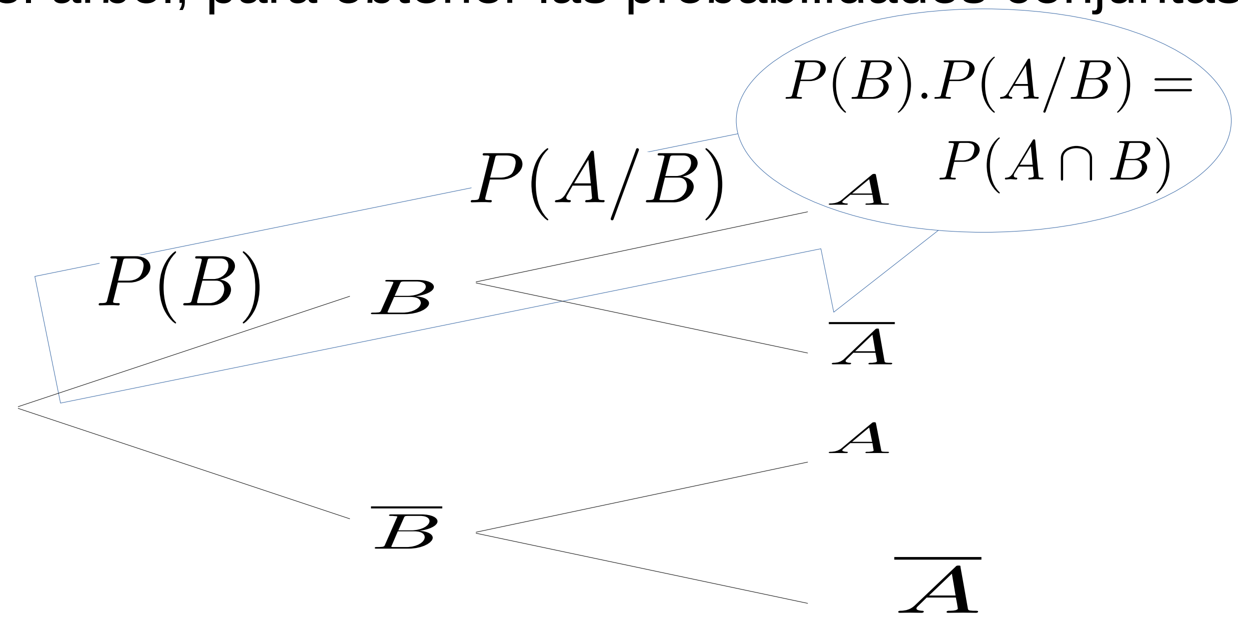
A partir de la fórmula de probabilidad la condicional siguiente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

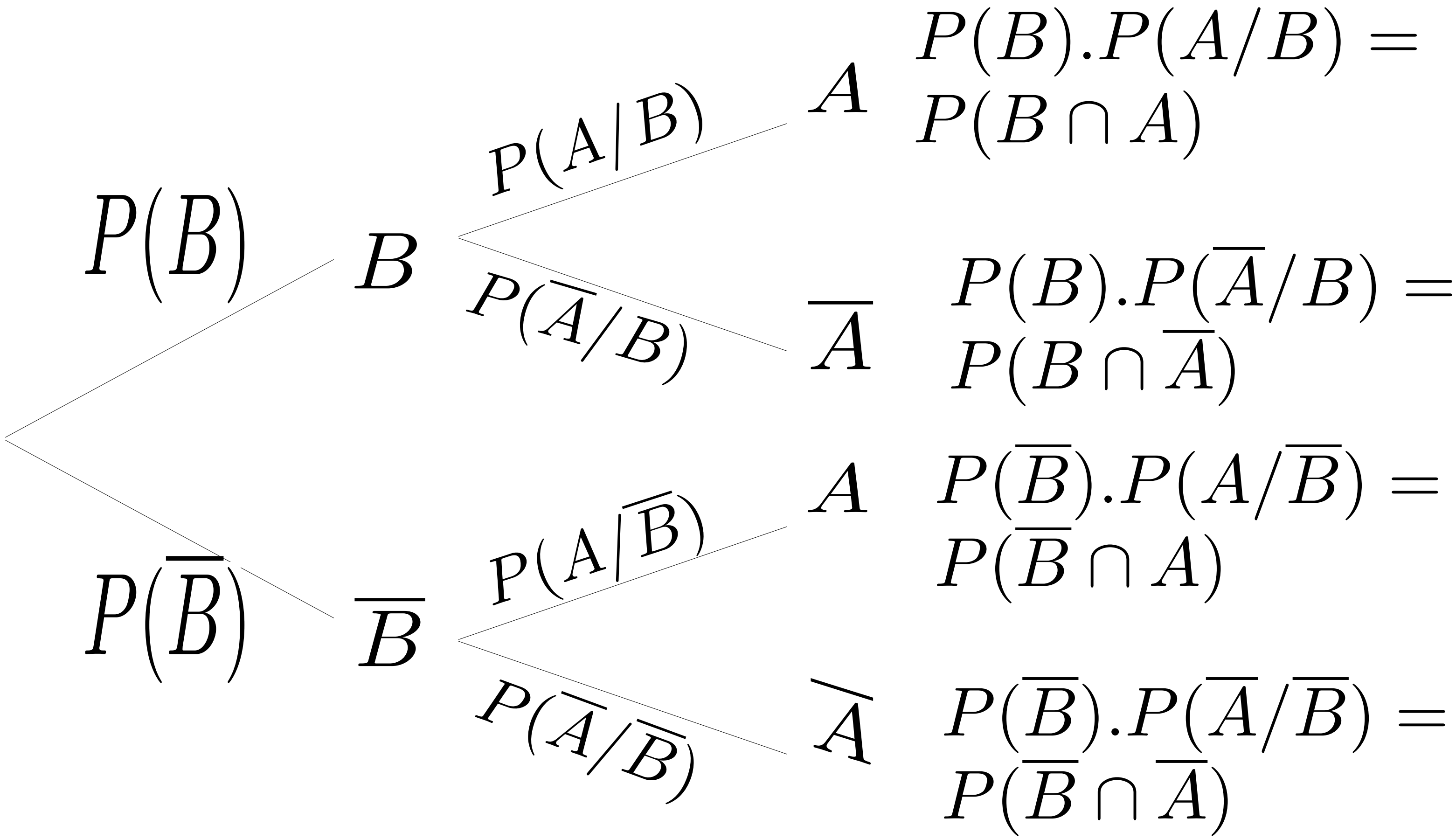
Se puede despejar la probabilidad conjunta, dando origen a la expresión siguiente:

$$P(B).P(A/B) = P(A \cap B)$$

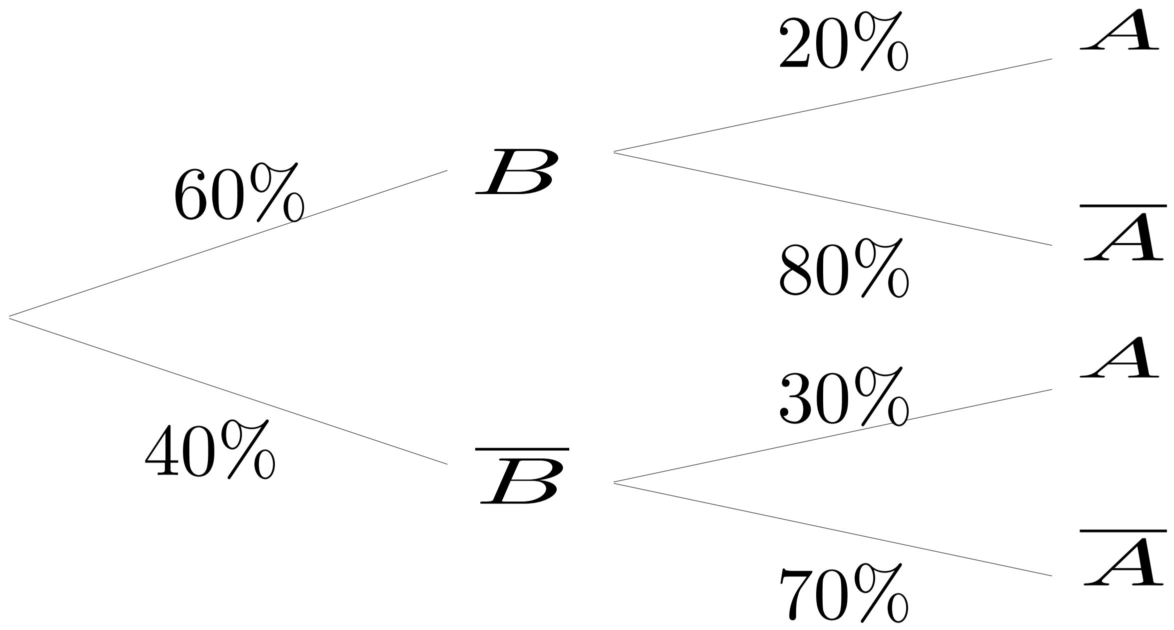
De manera equivalente a lo que puede obtenerse analíticamente, se puede considerar el producto de las probabilidades de cada rama del árbol, para obtener las probabilidades conjuntas:



De manera análoga, pueden agregarse en el árbol todas las probabilidades complementarias y el producto de las probabilidades de cada rama permitirá obtener las probabilidades conjuntas para cada combinación:



A partir de lo dicho anteriormente, ante un diagrama de árbol como el que sigue,

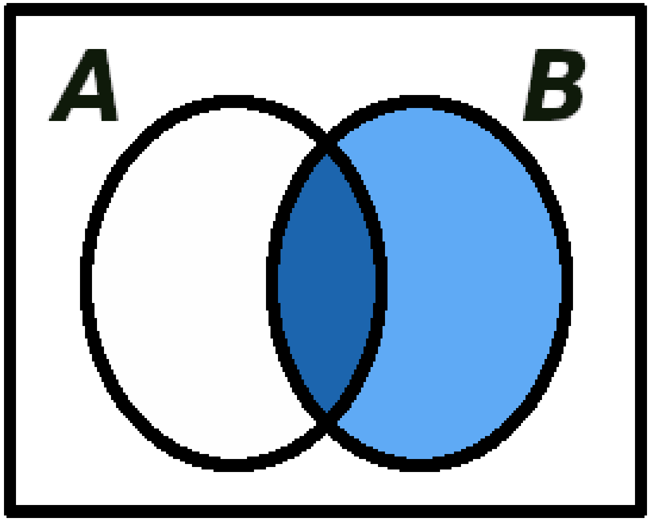


se puede deducir que la probabilidad conjunta de B y A, se puede calcular haciendo 0,60 x 0,20 = 0,12. Por otra parte si se analizan las probabilidades de A en los diferentes contextos, resulta evidente que la ocurrencia del evento B, influye reduciendo la probabilidad de que suceda A. De esta forma se puede concluir que existe dependencia entre A y B.

Si A y B son eventos no excluyentes, la fórmula de la probabilidad condicional se puede pensar como un cociente de casos favorables sobre posibles. Los casos posibles, serán naturalmente aquellos pertenecientes al evento que determina el contexto, es decir P(B). Lo casos favorables serán todos aquellos puntos que se encuentran en A en el contexto actual, es decir aquellos puntos que se encuentran en la intersección entre A y B.

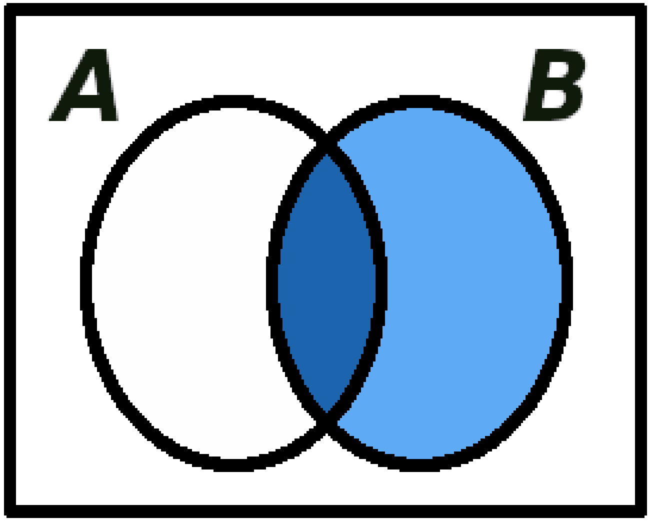
$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$$

CASO: EVENTOS NO EXCLUYENTES



Si A y B son eventos no excluyentes, pero además independientes, la fórmula de la probabilidad condicional se puede expresar reemplazando la probabilidad conjunta del numerador por el producto de las probabilidades de los eventos simples. De esta forma, como el evento B no influye en el evento A porque son independientes, la probabilidad del evento A en el contexto de B toma el mismo valor que en el espacio muestral, es decir P(A).

CASO: EVENTOS NO EXCLUYENTES E INDEPENDIENTES



$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$$

$$A, B : \text{Independientes} \implies P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

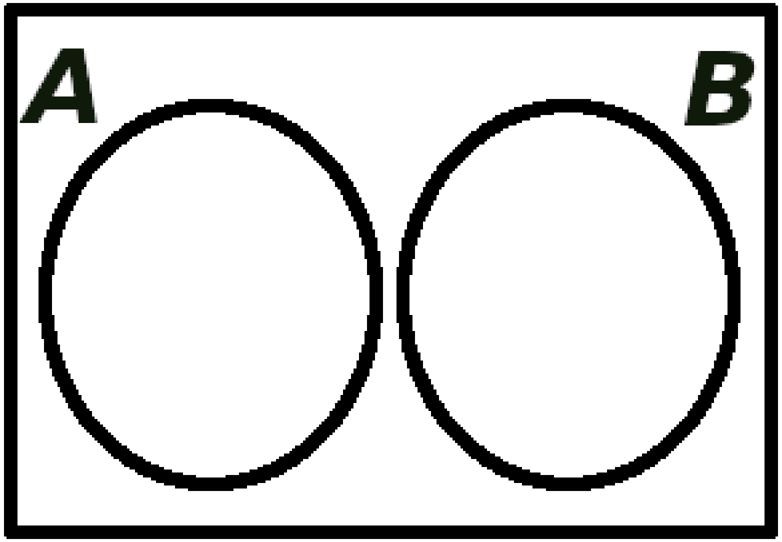
$$\implies P(A/B) = \frac{P(A) * P(B)}{P(B)} = P(A)$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Si A y B son eventos excluyentes, la probabilidad conjunta es cero por lo tanto la probabilidad condicional también se anulará.

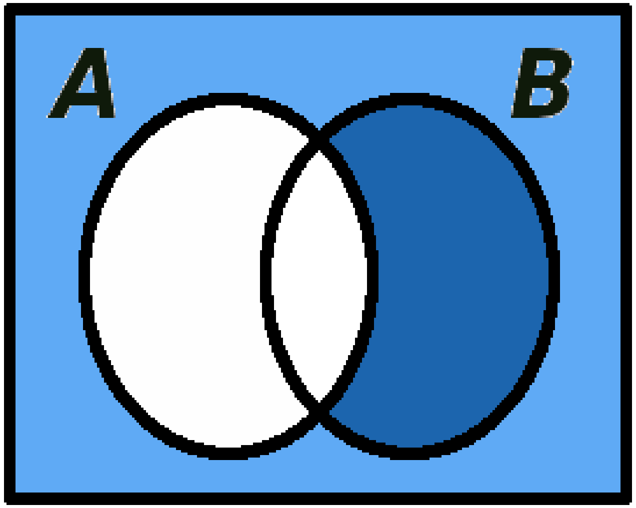
$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$$
$$A, B : \text{Excluyentes} \implies P(A \cap B) = 0$$
$$P(A/B) = 0/P(B) = 0$$

CASO: EVENTOS EXCLUYENTES



PROBABILIDAD CONTRARIA

Las probabilidades de los eventos complementarios pueden calcularse de la misma forma que en el espacio muestral siempre que se respete el mismo condicionante. De esta forma, en un mismo contexto, el complemento de un evento posee una probabilidad igual a 1 menos la probabilidad del evento complementado.



CASO: CONDICIONAL

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

Tal como se ha establecido, de la definición de la probabilidad condicional de A dado B, se puede despejar la probabilidad conjunta, dando origen a la expresión siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$$

A su vez, como la intersección de A y B es el mismo conjunto de puntos en el espacio muestral que la intersección de B y A, puede plantearse la siguiente igualdad:

$$P(B \cap A) = P(B/A).P(A)$$

Con lo cual se tiene además que:

$$P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$$

Como cierre de todo lo abordado en probabilidad, se presenta a continuación la generalización propuesta en el Teorema de Bayes.

TEOREMA DE BAYES

Dados un conjunto de eventos A_1, A_2, …, A_n, que conforman un sistema exhaustivo y excluyente de eventos -que se denominan hipótesis-, la probabilidad de ocurrencia de alguno de estos eventos, conociendo la ocurrencia de cualquier evento B perteneciente al espacio muestral podrá calcularse con la siguiente expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

A su vez, probabilidad total:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

Y por probabilidad condicional:

$$P(A_i \cap B) = P(B/A_i).P(A_i)$$

Por lo que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i).P(A_i)}{P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)+...+P(B/A_n).P(A_n)}$$

Proponemos pensar el teorema de Bayes, como una forma de integrar, relacionar y resumir todo lo que hemos visto en la presente unidad.

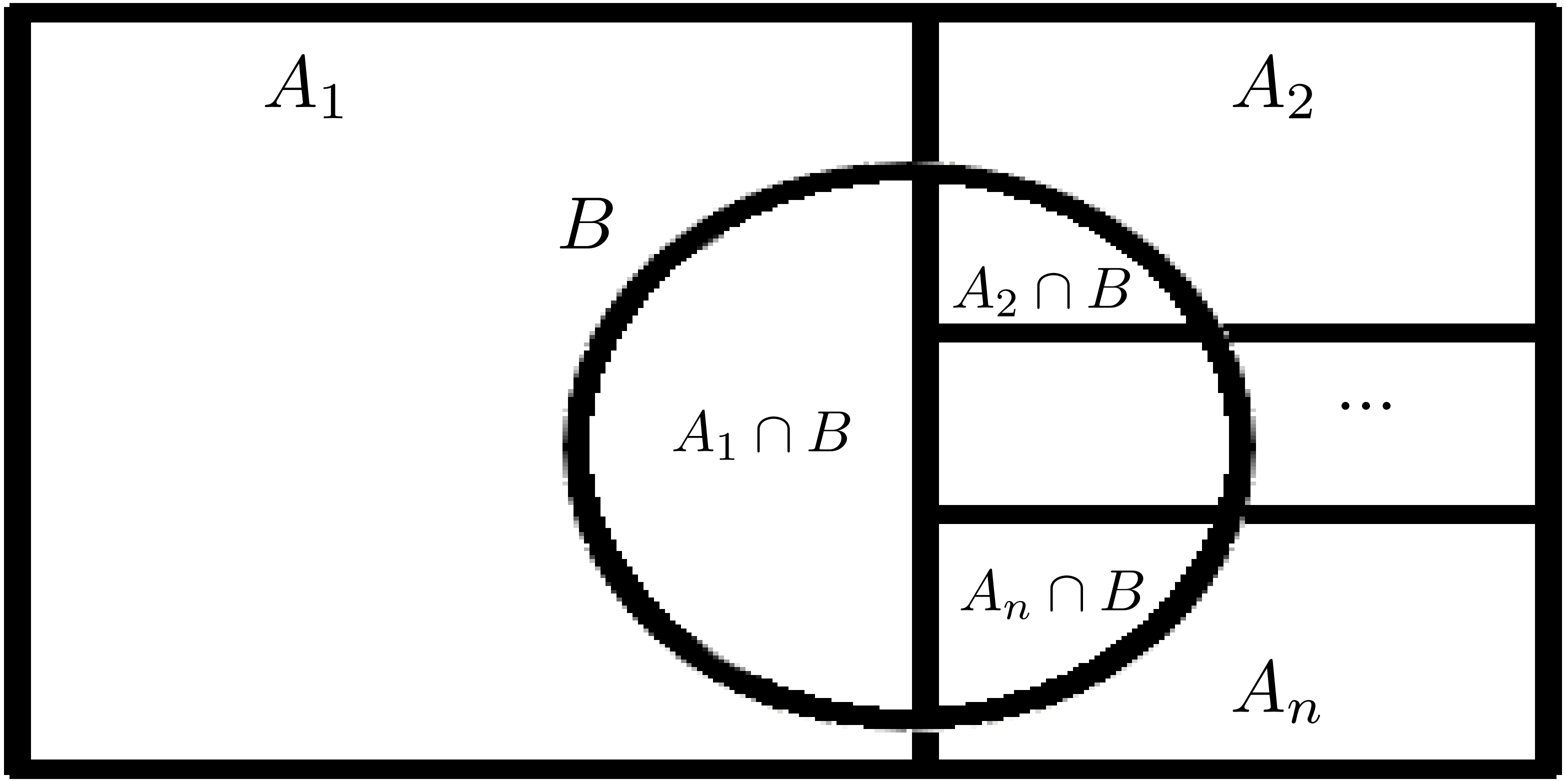
A partir de las nociones iniciales podemos pensar en la partición del espacio muestral en un conjunto hipótesis que forman un sistema exhaustivo y excluyente de eventos.

A partir de las probabilidades de Laplace, pensar el cociente de lo favorable a lo que nos interesa estudiar sobre lo posible.

Considerando la probabilidad condicional, proponer el cociente de la probabilidad conjunta sobre la probabilidad del evento que condiciona.

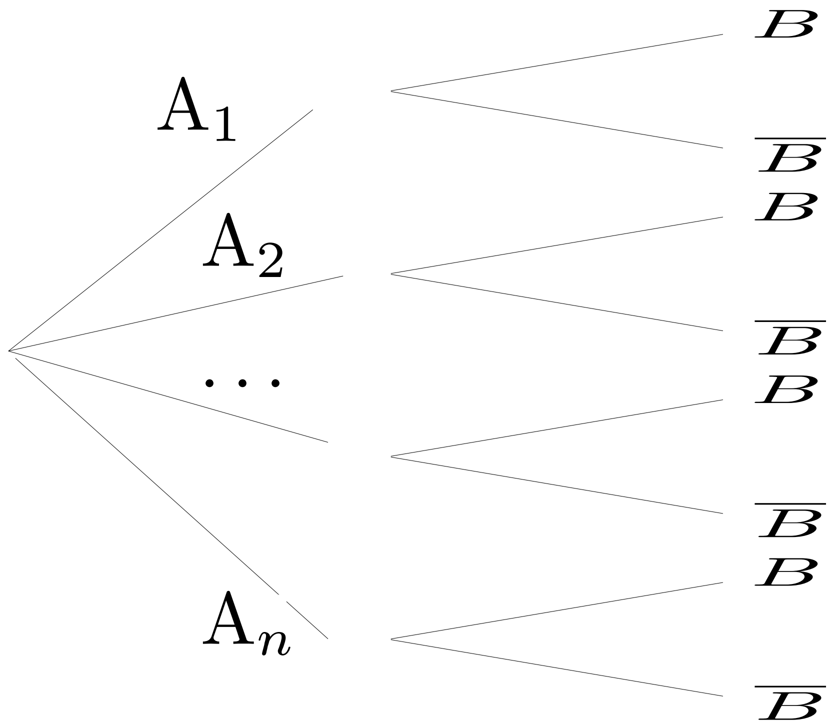
A partir de la combinación de todo lo anterior, podremos pensar la probabilidad condicional de cualquiera de las hipótesis dada la ocurrencia de evento de interés, como la probabilidad conjunta del evento en el contexto de la ocurrencia del mismo.

Presentamos a continuación algunos diagramas, de Venn y de Árbol que ilustran el Teorema de Bayes.



Si el espacio muestral es particionado en un conjunto de hipótesis A_1, A_2,..., A_n, que son eventos que conforman un sistema exhaustivo y excluyente, cualquier evento B de dicho EM, podrá conformarse como la unión de las intersecciones de cada hipótesis con dicho evento.

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$



$$\mathrm{P}(\ \mathrm{A}_1 \cap B) = P(B/A_1).P(A_1)$$

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{A}_2 \cap B) = P(B/A_2).P(A_2)$$

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{A}_i \cap B) = P(B/A_i).P(A_i)$$

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{A}_n \cap B) = P(B/A_n).P(A_n)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

¿Cómo pensar un ejercicio?

- **Interpretar el enunciado**
  - Datos
  - Identificar Eventos y Espacio Muestral.
  - Interrogantes
- **Planteo**
- **Resolución**
- **Respuesta**

2021 ~ Año de homenaje
al Premio Nobel de Medicina
Dr. César Milstein

ESTADÍSTICA
DIAPOSITIVAS DE EJEMPLO

Unidad 1 – *Teorema de Bayes*

Ingenierías en Recursos Hídricos / Ambiental / Agrimensura

Año 2021

Prof. Juan Pablo Taulamet

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Tres empresas se presentan a una licitación para la construcción de un puente.

Las probabilidades de que E1, E2 y E3 obtengan el contrato son 0.5, 0.3, y 0.2 respectivamente.

Se sabe además que si E1 es seleccionada, subcontratará a A como ejecutor de obra con probabilidad 0.8; si lo obtiene E2 la seleccionará con probabilidad 0.4; y si lo obtiene E3 lo hará con probabilidad 0.1.

Si se sabe que se ha subcontratado a la empresa A, ¿Cuál es la probabilidad de que haya obtenido el contrato E2?

Datos: Eventos y Probabilidades

E_1: “E1 obtiene el contrato”

E_2: “E2 obtiene el contrato”

E_3: “E3 obtiene el contrato”

$P(E_1) = 50\%$

$P(E_2) = 30\%$

$P(E_3) = 20\%$

Datos: Eventos y Probabilidades

“Si E_1 obtiene el contrato, subcontratará a A con probabilidad 0,8.”

A: “A es subcontratada”

$P(A/E_1) = 80\%$

$P(A/E_2) = 40\%$

$P(A/E_3) = 10\%$

¿Pregunta?

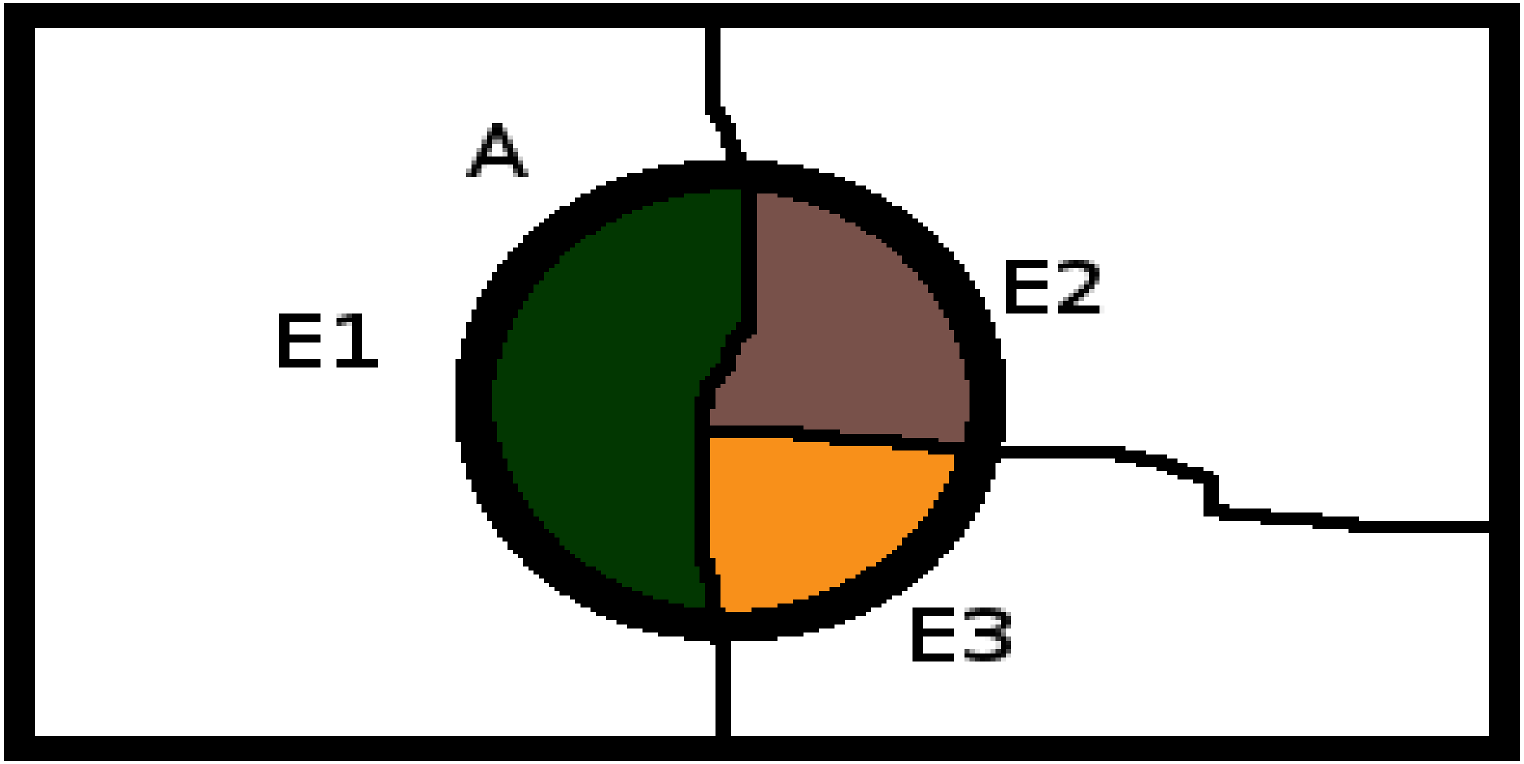
Si se sabe que se ha subcontratado a la empresa A, ¿Cuál es la probabilidad de que haya obtenido el contrato E2?

¿Pregunta?

Si se sabe que se ha subcontratado a la empresa A, ¿Cuál es la probabilidad de que haya obtenido el contrato E2?

$$P(E_2/A) = ?$$

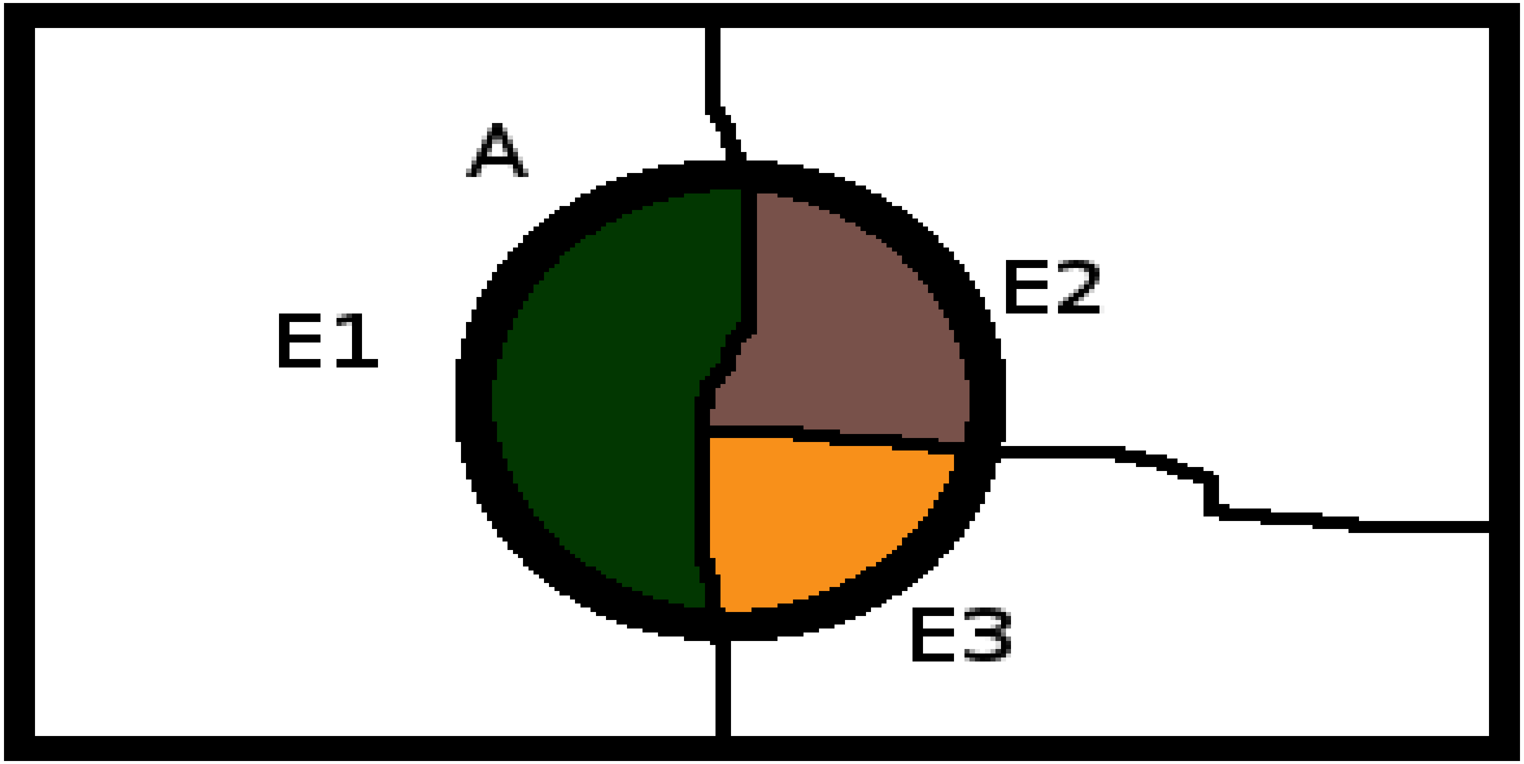
Teorema de Bayes



¿Pregunta?

$$P(E_2/A) = P(E_2 \cap A) \,/\, P(A)$$

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3)$$



¿Pregunta?

$$P(E_2/A) = P(E_2 \cap A) \,/\, P(A)$$

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3)$$

$$\begin{aligned} P(A) = \; & P(A/E_1) * P(E_1) + \\ & P(A/E_2) * P(E_2) + \\ & P(A/E_3) * P(E_3) \; \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) = \; & 0{,}8*0{,}5 + 0{,}4*0{,}3 + 0{,}1*0{,}2 \\ & 0{,}40 + 0{,}12 + 0{,}02 = 54\% \end{aligned}$$

$$P(E_2/A) = 0{,}12 \,/\, 0{,}54 = 22{,}22\%$$

Respuesta

Si se sabe que se ha subcontratado a la empresa A, la probabilidad de que la empresa que la haya subcontratado sea *E2* es del 22%.

(1994–2024)
30 años de la Consagración Constitucional de la Autonomía y Autarquía Universitaria en Argentina.

FICH

ESTADÍSTICA
DIAPOSITIVAS DE EJEMPLO

Unidad 1 - *Probabilidad*

Ingenierías en Recursos Hídricos / Ambiental / Agrimensura

Año 2024

Prof. Juan Pablo Taulamet

consultas: taulamet@unl.edu.ar

¿Cómo pensar un ejercicio?

- **Interpretar el enunciado**
  - Datos
  - Identificar Eventos y Espacio Muestral.
  - Interrogantes
- **Planteo**
- **Resolución**
- **Respuesta**

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2, calcular las probabilidades siguientes:

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

b) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado negativo.

c) Haya bacterias y además el test dé positivo.

d) O haya bacterias, o el test dé positivo.

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Datos

Definir Eventos o Sucesos

H: “Hay bacterias en el agua”

T: “El test da positivo”

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. *Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2, calcular la probabilidad de...*

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$90\% = P(?)$$

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. *Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2, calcular la probabilidad de...*

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$90\% = P(T/H)$$

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. ***Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8.*** *Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2, calcular la probabilidad de que:*

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$80\% = P(?)$$

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. ***Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8.*** *Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2, calcular la probabilidad de que:*

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$80\% = P(\overline{T}/\overline{H})$$

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8. Sabiendo que ***la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2,*** *calcular la probabilidad de que:*

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$20\% = P(?)$$

Un test detecta la presencia de cierto tipo de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8. Sabiendo que ***la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de ese tipo es 0.2,*** *calcular la probabilidad de que:*

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$20\% = P(H)$$

Datos

Definir Eventos o Sucesos

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

Interrogantes

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

b) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado negativo.

c) Haya bacterias y además el test dé positivo.

d) O haya bacterias, o el test dé positivo.

Planteo: P. Condicional

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

$$P(H/T) = ?$$

Planteo: P. Condicional

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

$$P(H/T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)}$$

Entendiendo T

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

$$P(H/T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T \cap H \cup T \cap \bar{H})}$$

H: "Hay bacterias en el agua"
T: "El test da positivo"

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

$$P(H/T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T \cap H) + P(T \cap \bar{H})}$$

Aplicando Prob. Condicional

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

$$P(H/T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T \cap H) + P(T \cap \bar{H})}$$

$$\frac{P(T/H) * P(H)}{P(T/H) * P(H) + P(T/\bar{H}) * P(\bar{H})}$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Resultado

H: “Hay bacterias en el agua”
T: “El test da positivo”

$$P(T/H) = 90\%$$
$$P(\overline{T}/\overline{H}) = 80\%$$
$$P(H) = 20\%$$

$$P(H/T) =$$

$$\frac{P(T/H)*P(H)}{P(T/H)*P(H)+P(T/\bar{H})*P(\bar{H})}$$

$$\frac{90\%*20\%}{90\%*20\%+(1-80\%)*(1-20\%)} \approx 53\%$$

consultas: taulamet@unl.edu.ar

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

$$P(H/T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T \cap H \cup T \cap \bar{H})}$$

$$\frac{90\% * 20\%}{90\% * 20\% + (1 - 80\%) * (1 - 20\%)} \approx 53\%$$

b) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado negativo.

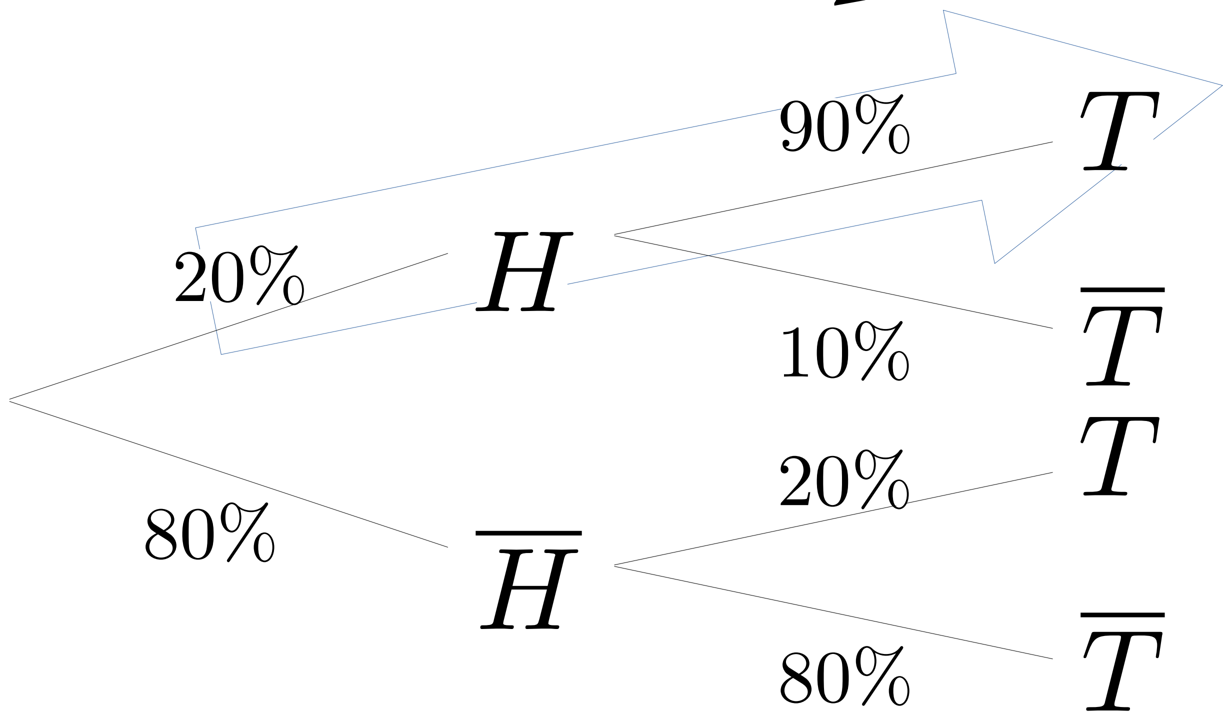
$$P(H/\bar{T}) = \frac{P(H \cap \bar{T})}{P(H \cap \bar{T} \cup \bar{H} \cap \bar{T})}$$

$$\frac{20\% * 10\%}{20\% * 10\% + 80\% * 80\%} \approx 3\%$$

c) Haya bacterias y además el test dé positivo.

$$P(H \cap T) = ?$$

$$20\% . 90\% * = 18\%$$



consultas: taulamet@unl.edu.ar

d) O haya bacterias, o el test dé positivo.

$$P(H \cup T) = ?$$

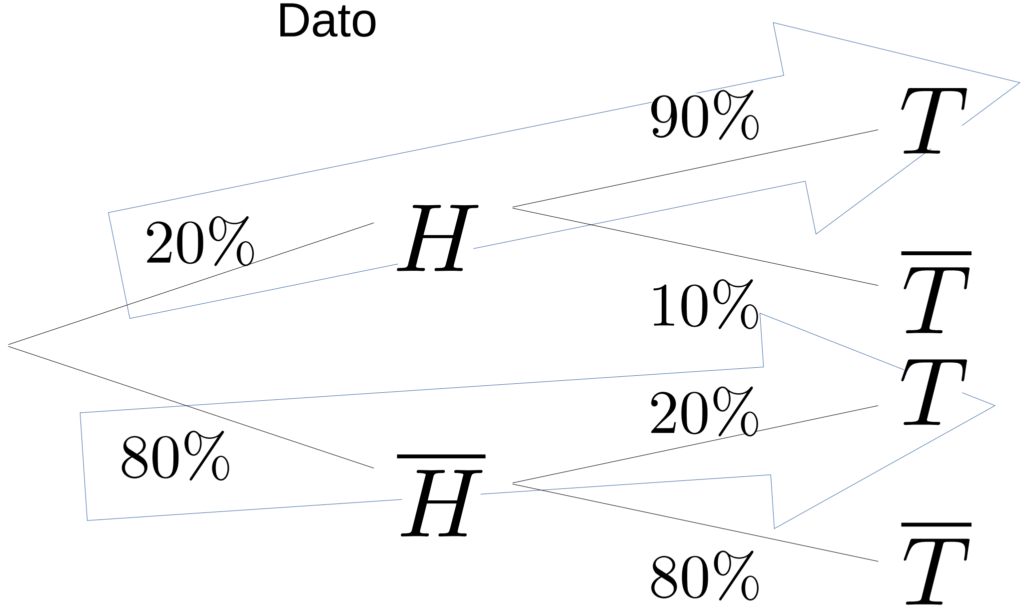
Por P. Total:

$$P(H) + P(T) - P(H \cap T)$$

$$P(T) = P(T \cap H) + P(T \cap \overline{H}) = 18\% + 16\%) = 34\%$$

$$P(H \cup T) = 20\% + 34\% - 18\% = 36\%$$

Dato



$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \cap H)$$

$$20\%.90\%* = 18\%$$

$$P(T \cap \overline{H})$$

$$80\%.20\%* = 16\%$$

Respuestas

a) La probabilidad de que haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo es 53%.

b) La probabilidad de que haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado negativo es 3%. (Falso negativo).

c) La probabilidad de que haya bacterias y además el test dé positivo es 18% y es una probabilidad conjunta.

d) La probabilidad de que haya bacterias, o el test dé positivo, es una probabilidad total que vale 36%.