(1994–2024)
30 años de la Consagración Constitucional de la Autonomía y Autarquía Universitaria en Argentina.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ESTADÍSTICA

GUÍA DE PRÁCTICA

UNIDAD 2 - VARIABLES ALEATORIAS

Responsable de cátedra: Prof. Juan Pablo Taulamet

Equipo de cátedra: ***Auxiliares:*** Lic. María José Llop (JTP) - Ing. Franco Nardi (Ay. 1°) ***Ayudantes:*** AIA Cristian Bottazzi - Téc. Eliana García

Carreras: Ingenierías en: Recursos Hídricos - Ambiental - Agrimensura

AÑO ACADÉMICO 2024

Ejercicio 1

La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X: "número de veces que se utiliza un aparato en particular, por día".

x	0	1	2
$f(x)$	0.1	a	0.6

a) Hallar la probabilidad de utilizar el aparato sólo una vez por día.

b) ¿Cuál es la probabilidad de no utilizarlo en un día determinado?

c) Encontrar la función de distribución de la variable aleatoria.

Ejercicio 2

La distribución de probabilidades de X: "número de errores en un canal de transmisión" se presenta en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Determinar la función acumulativa de X y utilizarla para determinar la probabilidad de encontrar más de 3 errores en el canal.

Ejercicio 3

Los errores en un canal de transmisión experimental se encuentran cuando un certificador controla la transmisión que detecta impulsos que faltan. El número de errores encontrados en una cadena de ocho bits es una variable aleatoria con la siguiente distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}7 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 0{,}9 & \text{si } 4 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

Determinar las siguientes probabilidades e interpretar:

a) $P(X \leq 4)$

b) $P(X > 7)$

c) $P(X \leq 5)$

d) $P(X \geq 4)$

e) $P(X \leq 2)$

Ejercicio 4

Un teodolito se clasifica de acuerdo al número de defectos de fabricación y a la fábrica que lo produce. Sean X e Y las variables aleatorias que representan respectivamente el número de defectos por unidad, con valores posibles 0, 1, 2 y 3; y el número de fábrica con valores posibles 1 y 2. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades conjunta.

		x			
		0	1	2	3
y	1	1/8	1/16	3/16	1/8
	2	1/16	1/16	1/8	1/4

a) Determinar la distribución de probabilidad marginal de X y de Y.

b) Encontrar la probabilidad de X condicionada a $Y = 1$.

c) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar.

Ejercicio 5

Sea X el número de veces que falla cierta máquina de control numérico: 1,2 o 3 veces en un día dado. Sea Y el número de veces que se llama al personal técnico para subsanar la falla. Su distribución de probabilidad conjunta está dada por:

f(x,y)		x		
		1	2	3
	1	0.05	0.05	0.10
y	2	0.05	0.10	0.35
	3	0.00	0.20	0.10

a) Obtener la distribución de probabilidades del número de veces que falla la máquina. Incluir la función acumulativa.

b) Obtener la distribución de la cantidad de veces que se llama al personal técnico.Incluir la función acumulativa.

c) Encontrar P(Y=3/X=2). ¿Cómo se interpreta este valor?

d) ¿Considera que la cantidad de veces que falla la máquina es independiente de la cantidad de veces que se llama al personal técnico?

Ejercicio 6

Se sabe que la función conjunta que describe a una variable bidimensional es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x^2 - y) & \text{para } x = 2,3 \text{ e } y = 1,2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

a) Hallar las funciones marginales e interpretarlas.

b) Calcular la probabilidad de X condicionada a $Y = 2$.

c) ¿Son estas variables independientes? ¿Por qué?

Ejercicio 7

Se conoce que la variable aleatoria X definida como la duración (en días) de un disco rígido se distribuye según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & \text{si } x > 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Es f una función de densidad válida?

b) Calcular la función F de distribución acumulada de la variable X.

c) Utilizar la función F del ítem anterior para calcular $P(1500 < X < 2000)$.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un disco rígido dure menos de 2000 días, si se conoce que el disco funciona después de 1500 días de uso de la máquina?

Ejercicio 8

El tiempo (en horas) que tarda un satélite meteorológico en pasar por el mismo lugar es una variable aleatoria que posee la siguiente función de distribución:

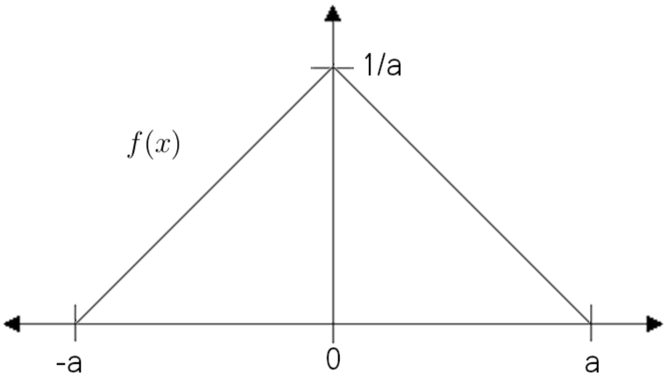
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-8x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

a) Encontrar la función de densidad que describe a la variable aleatoria.

b) Encontrar la probabilidad de esperar menos de 12 minutos para recibir una señal del mismo lugar.

Ejercicio 9

Una variable aleatoria está distribuida según la ley que se muestra en la figura:



a) ¿Es f una función de densidad válida? ¿Para qué valores de la constante a? Justificar.

b) Realizar una gráfica para $a = 2$ y $a = 3$ en los mismos ejes coordenados. ¿Qué pasa con la forma de la función?

c) Encontrar una expresión para la función de densidad y verificar que sea válida.

d) Obtener la función de distribución correspondiente.

Ejercicio 10

El nivel de agua de un tanque (en metros) es una variable aleatoria X que se describe según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

a) ¿Es una función adecuada para describir a la variable en estudio? ¿Por qué?

b) Obtener $P(1/5 < X < 3/5)$ utilizando la función de densidad y la de distribución acumulada. ¿Cuál de las dos dirías que es más conveniente utilizar y por qué?

c) La jefa de producción quiere saber si el nivel de agua en el tanque es mayor a $1/2$. Un operario le indicó que la única información certera que tiene es que el nivel del agua está entre $1/3$ y $2/3$, Calcular la probabilidad de que el nivel sea mayor a $1/2$ en ese contexto. ¿Qué tipo de probabilidad es?

Ejercicio 11

Se está realizando un estudio en un sistema y se analiza una variable aleatoria X con función dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) ¿Se puede verificar con F que la densidad correspondiente f cumple la condición de cierre?

b) Obtener la función de densidad f.

c) Obtener P(X >2).

Considerar una nueva variable aleatoria Y que también es necesaria para el estudio de manera que la función de densidad conjunta es:

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-(x+y)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

d) ¿Son estas variables independientes?

e) Calcular P (Y <1 / X >2).

Ejercicio 12

En una comunicación entre un servidor web y un cliente que necesita acceder a un sistema se estudia el tiempo de llegada de la solicitud y el tiempo transcurrido hasta el ingreso al sistema en el mecanismo de autenticación. Sean X e Y respectivamente, los períodos de tiempo que se utilizan para cada caso (en minutos) y suponiendo que la función de densidad conjunta para estas dos variables es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la densidad marginal de X.

b) Hallar la densidad marginal de Y.

c) Encontrar la probabilidad de que la llegada solicitud sea menos de la mitad del tiempo de ingreso.

d) Si la solicitud llega en menos de 30 segundos, ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo transcurrido hasta el ingreso al sistema sea mayor a 30 segundos?

e) Calcular P(X+Y<1) e interpretar.

Ejercicio 13

Una empresa está interesada en comprar un dispositivo que mida la concentración de un componente en un producto y su PH. Los errores asociados a las mediciones de dicho dispositivo pueden ser consideradas como dos variables aleatorias X e Y (X = 'Error al medir la concentración del componente'; Y = 'Error en la determinación del PH'). La distribución conjunta viene dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{si } x \in [-1,1], y \in [-1,1] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

a) Obtener las distribuciones marginales de las variables e interpretar.

b) ¿Son estas variables X e Y dependientes? ¿Por qué?

c) Sabiendo que el error al medir la concentración del componente es inferior a 0.5, calcular la probabilidad de que el error cometido al medir su PH sea de $\pm 0{,}5$.